Exercices

ED

Exercice 1/26

Dans ce QCM, une seule réponse est correcte. Donner le numéro de la bonne réponse en **justifiant soigneusement votre réponse**.

Question 1 : La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ est solution de l'équation différentielle :

1. $y' + 2y = 2e^x$
2. $y' = 2y + e^x$
3. $2y' - 4y = e^x$
4. $-y' - y = 2e^x$

Question 2 : Les solutions de l'équation différentielle $5y' - 2y = 0$, sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = Ce^{\frac{2}{5}x}$ avec $C \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = Ce^{\frac{5}{2}x}$ avec $C \in \mathbb{R}$
3. $f(x) = Ce^{-\frac{2}{5}x}$ avec $C \in \mathbb{R}$
4. $f(x) = Ce^{-\frac{5}{2}x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Question 3 : Les solutions de l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{3}y = -\dfrac{2}{3}$, sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = Ce^{\frac{1}{3}x}$ avec $C \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = Ce^{\frac{1}{3}x} - 2$ avec $C \in \mathbb{R}$
3. $f(x) = Ce^{-\frac{2}{3}x} + 2$ avec $C \in \mathbb{R}$
4. $f(x) = Ce^{-\frac{1}{3}x} - 2$ avec $C \in \mathbb{R}$

Question 4 : La solution de l'équation différentielle $2y' = y$ tel que $f(\ln(9)) = 2$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = \dfrac{2}{3}e^{\frac{1}{2}x}$
2. $f(x) = 2e^{2x}$
3. $f(x) = -\dfrac{3}{2}Ce^{-2x}$
4. $f(x) = 6e^{-\frac{1}{2}x}$

Question 5 : La solution de l'équation différentielle $2y' - y = 3$ tel que $f(1) = 1$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = 4e^{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} - 3$
2. $f(x) = 4e^{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} + 3$
3. $f(x) = 4e^{\frac{1}{2}x} - \dfrac{3}{2}$
4. $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x} + \dfrac{3}{2}$

Exercice 2/26

Le taux de décroissance radioactive, proportionnel au nombre de noyaux radioactifs N donné, pour tout $t \geq 0$, par l'expression :

$$\frac{dN}{dt}(t) = -\lambda N(t),\ \text{soit}\ N'(t) = -\lambda N(t)$$

où λ est la constante radioactive positive et t est exprimé en années.

1. Exprimer le nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs présents à l'instant t sachant que $N(0) = N_0$.
2. La période de demi-vie T représente le temps au bout duquel la moitié des noyaux radioactifs présents se sont désintégrés.
   Exprimer T en fonction de λ.
3. **Application numérique : datation au carbone 14**
   (a) La période du carbone 14 est de 5568 ans.
   Que vaut la constante radioactive λ ?
   (b) On a trouvé en 2006 dans un site archéologique des ossements humains dont la teneur en carbone 14 est égal à 35% de celle des os d'un être humain en vie.
   Déterminer la date de la mort de cet humain.

Exercice 3/26

Vérifier si les fonctions suivantes sont solutions ou non sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante

1. $y' + 2y = 6x + 5$ et $f(x) = 3x + 1$
2. $y' + y - x - 1 = 0$ et $f(t) = x$

Exercice 4/26

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 3y$
2. $3y' + 6y = 0$
3. $y' = 0$

Exercice 5/26

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 2y + 1$
2. $y = 3y' + 6$

Exercice 6/26

Dans chaque cas, donner toutes les solutions, puis la solution répondant au problème de Cauchy :

1. $2y' - y = 3$ avec $y(1) = 1$
2. $y' - 6y = 8$ avec $y(0) = 1$

Exercice 7/26

Partie A :
On considère la fonction w définie pour tous réels positifs t par :

$$w(t) = 4e^{-200t} + 146$$

1. Calculer $w(0)$
2. Déterminer la limite de la fonction w lorsque t tend vers $+\infty$.
3. Étudier le sens de variation de w sur $[0; +\infty[$.

Partie B :
On étudie l'évolution de la vitesse d'un moteur dont la vitesse de rotation à vide est de 150 rad/s. Durant l'embrayage, la vitesse de rotation du moteur, exprimée en rad/sec, est modélisée par une fonction solution de l'équation différentielle :

$$(E) : \frac{1}{200}y' + y = 146$$

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle t positive, exprimée en secondes.

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Vérifier que la fonction w étudiée dans la partie A est la fonction solution de (E) vérifiant la condition initiale $w(0) = 150$.
3. Interpréter la limite de $w(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$, ainsi que le sens de variation déterminé dans la partie A.
4. On considère que la vitesse de rotation du moteur est stabilisée lorsque la quantité $\dfrac{w(t) - 146}{146}$ est inférieur à 0,01. Calculer le temps mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse. On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millième de seconde.

Exercice 8/26

Vérifier si les fonctions suivantes sont solutions ou non sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante

1. $y' = 2y + e^x$ et $f(x) = -ex$
2. $y' + 2y = 6x + 5$ et $f(x) = 3x + 1$
3. $y' + y - x - 1 = 0$ et $f(t) = x$

Exercice 9/26

Vérifier si les fonctions suivantes sont solutions ou non sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante

1. $y \times y' = x$ et $f(x) = x$
2. $y' - 2x \times y = 0$ et $f(x) = e^{-x^2}$
3. $y'' + y = 0$ et $f(t) = \cos(t)$

Exercice 10/26 : Équations homogènes

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 3y$
2. $y' = -2y$
3. $y' + 5y = 0$
4. $3y' + 6y = 0$
5. $y' - 2y = 0$
6. $5y' - 2y = 0$
7. $y = 3y'$
8. $-4y' - 12y = 0$
9. $-2y' + y = 0$
10. $y' = 0$

Exercice 11/26

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = -y$
2. $y' = \frac{1}{2}y$
3. $y' + y = 0$
4. $y' = 4y$
5. $3y' + y = 0$

Exercice 12/26

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 2y + 1$
2. $y' = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$
3. $y' + 2y = 3$
4. $y' - 6 = 5y$
5. $y = 3y' + 6$

Exercice 13/26

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + e^{3x} = 1$
2. $y = 4y'$
3. $y - y' = 0$
4. $y' = 3y + 12$
5. $5y' - y = 10$

Exercice 14/26 : Question de cours

Vérifier si la fonction suivante est solution ou non sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante $y' = 2y + e^x$ et $f(x) = -e^x$

Exercice 15/26 : Question de cours

Résoudre l'équation différentielle suivante : $-4y' - 12y = 24$

Exercice 16/26 : Problème de Cauchy

Dans chaque cas déterminer la solution f de léquation :

1. $y' = 3y$ avec $f(0) = 2$
2. $2y' = y$ avec $f(\ln(9) = 2$
3. $2y' + y = 0$ avec $f(2) = e$

Exercice 17/26 : Problème de Cauchy

Dans chaque cas déterminer la solution f de léquation :

1. $y' + 7y = 0$ avec $f(1) = 1$
2. $y' = 0,2y - 3$ avec $f(0) = 1$

Exercice 18/26

Dans chaque cas, donner toutes les solutions, puis la solution répondant au problème de Cauchy :

1. $2y' - y = 3$ avec $y(1) = 1$
2. $y' - 6y = 8$ avec $y(0) = 1$

Exercice 19/26

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' = -3y$
2. $y' + 5y = 8$
3. $3y' - y = 2$
4. $\begin{cases} y' - y & = 1 \\ y(0) & = 0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2y' - 5y & = 1 \\ y(1) & = 7 \end{cases}$

Exercice 20/26

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = -y + 2$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
2. En déduire la solution f de l'équation différentielle (E) qui s'annule en 0.

Exercice 21/26

On considère l'équation différentielle $(E) : 2y' + y = 0$, où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).
2. Le plan est muni d'un repère.
   Déterminer la solution f de (E), dont la courbe représentative C_f dans ce repère passe par le point $A(\ln(9); 1)$.

Exercice 22/26

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle

$$(E) \ : \ y' - 2y = 3x - 1$$

.

1. Démontrer que, si f est une solution définie sur $\mathbb{R}$ de (E), alors f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est solution de $(E_0) \ : \ y' = 2y + 3$.
2. Résoudre (E_0).
3. En déduire la solution f de (E) telle que $f(0) = 5$.

Exercice 23/26 : *

L'objectif de cet exercices est de résoudre l'équation différentielle (E) :

$$5y' - 7y = x^2 + 1$$

.

1. Déterminer les réels a, b, c pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E).
2. Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E_0) :

   $$5y' - 7y = 0$$

   .
3. Résoudre (E_0).
4. En déduire les solutions de (E).

Exercice 24/26

Partie A :
On considère la fonction w définie pour tous réels positifs t par :

$$w(t) = 4e^{-200t} + 146$$

1. Calculer $w(0)$
2. Déterminer la limite de la fonction w lorsque t tend vers $+\infty$.
3. Étudier le sens de variation de w sur $[0; +\infty[$.

Partie B :
On étudie l'évolution de la vitesse d'un moteur dont la vitesse de rotation à vide est de 150 rad/s. Durant l'embrayage, la vitesse de rotation du moteur, exprimée en rad/sec, est modélisée par une fonction solution de l'équation différentielle :

$$(E) : \frac{1}{200}y' + y = 146$$

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle t positive, exprimée en secondes.

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Vérifier que la fonction w étudiée dans la partie A est la fonction solution de (E) vérifiant la condition initiale $w(0) = 150$.
3. Interpréter la limite de $w(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$, ainsi que le sens de variation déterminé dans la partie A.
4. On considère que la vitesse de rotation du moteur est stabilisée lorsque la quantité $\dfrac{w(t) - 146}{146}$ est inférieur à 0,01. Calculer le temps mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse. On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millième de seconde.

Exercice 25/26

Un circuit RL comprend en série un générateur de tension constante E, une bobine d'inductance L et une résistance R.
L'intensité du courant électrique i dans le circuit RL est fonction du temps t, exprimé en seconde, et solution de l'équation différentielle :

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(E - Ri)$$

où $R,\ E$ et L sont des constantes strictement positives.

1. Déterminer la solution i de cette équation différentielle sachant que :
$$i(0) = 0$$
2. Étudier les variations de i.

Exercice 26/26

On lâche une bille dans un puits à sec de 15 mètres à l'instant initial 0.
On note t_0 l'instant où la bille atteint le fond du puits.
On néglige les frottements de l'air.
On choisit un repère $(O; \overrightarrow{j})$, où O est le fond du puits et $\overrightarrow{j}$ un vecteur dirigé vers le haut.
D'après le principe fondamental de la dynamique, la trajectoire y est solution de $y''(t) = -g$,

où g est l'unité de l'accélération de la pesanteur ($g = 9,81\ m.s^{-1}$ sur terre).

1. Calculer, pour tout $t \in [0; t_0]$, la vitesse $v(t)$ et la trajectoire $y(t)$.
2. Calculer t_0 à 10^{-2} près.