



Corrigé : Exercices

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1/34

On pose $z_1 = -2 + 3i$ et $z_2 = 5 + 4i$.

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$.

Solution :

$$z_1 + z_2 = 3 + 7i \text{ et } z_1 z_2 = -22 + 7i$$

Exercice 2/34

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1. $i - (2 + 3i)$

2. $(4 + i)(-5 + 2i)$

3. $2(6 - 5i) - 3(4 + 2i)$

4. $(5 + 3i)^2$

5. $(5 + 3i)(5 - 3i)$

6. $(1 - i)^2$

7. $(i + 1)(i - 1) + 2$

8. $2 + i\sqrt{3} + \left(\frac{1}{2} + 3i\right)^2$

Solution :

1. $-2 - 2i$

2. $-16i$

3. $-22 + 3i$

4. $16 + 30i$

5. 34

6. $-2i$

7. 0

8. $-\frac{27}{4} + i(3 + \sqrt{3})$

Exercice 3/34

On pose $z_1 = 1 - 2i$ et $z_2 = 3 + i$.

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes $\frac{1}{z_1}$ et $\frac{z_1}{z_2}$.

Solution : $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{5} + i\frac{2}{5}$ et $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{10} - i\frac{7}{10}$

Exercice 4/34

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1. $\frac{1}{i}$
2. $\frac{1}{1-i}$
3. $\frac{1}{3-4i}$
4. $\frac{i}{-2+i}$
5. $\frac{3-2i}{i}$
6. $\frac{3+5i}{5-3i}$
7. $\frac{1}{(3-i)(-1+2i)}$
8. $\frac{1-3i}{(-1+2i)(1-i)}$

Solution :

1. $-i$
2. $\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$
3. $\frac{3}{25} + i\frac{4}{25}$
4. $\frac{1}{5} - i\frac{2}{5}$
5. $-2 - 3i$
6. i
7. $-\frac{1}{50} - i\frac{7}{50}$
8. $-\frac{4}{5} - i\frac{3}{5}$

Exercice 5/34

Soit a et b deux réels. On pose $z_1 = a + 3i - i(b - 2i)$ et $z_2 = 3 + i$.

A quelle(s) condition(s) sur a et b les nombres complexes z_1 et z_2 sont-ils égaux ?

Solution : $a = 5$ et $b = 2$

Exercice 6/34

Déterminer, sous forme algébrique, le conjugué de chacun des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = 3 - 11i$
2. $z_2 = 8i$
3. $z_3 = 2i - 7$
4. $z_4 = (3 + i)(-11 - 2i)$
5. $z_5 = (1 - 2i)^2$
6. $z_6 = \frac{2 - 3i}{8 + 6i}$

Solution :

1. $\overline{z_1} = 3 + 11i$
2. $\overline{z_2} = -8i$
3. $\overline{z_3} = -2i - 7$
4. $\overline{z_4} = -31 + 17i$
5. $\overline{z_5} = -3 + 4i$
6. $\overline{z_6} = -\frac{2}{50} + i\frac{9}{25}$

Exercice 7/34

Soit z un nombre complexe, on pose $Z = z^2 + \overline{z}^2$.

Montrer que Z est un nombre réel.

Solution : Méthode 1 : montrer que la partie imaginaire est nulle en prenant $z = a + ib$.

Méthode 2 : montrer que Z est égal à son conjugué.

Exercice 8/34

Soit z un nombre complexe, on pose $Z = z^2 - \bar{z}^2$.
Montrer que Z est un imaginaire pur.

Solution : Méthode 1 : montrer que la partie réelle est nulle en prenant $z = a + ib$.
Méthode 2 : montrer que Z est égal à l'opposé de son conjugué.

Exercice 9/34

On considère les nombres complexes $z_1 = \frac{3-i}{5+7i}$ et $z_2 = \frac{3+i}{5-7i}$.

1. Vérifier que $z_1 = \bar{z}_2$.
2. En déduire que $z_1 + z_2$ est réel, que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur et les calculer.

Solution :

1. Conjugué du quotient est égal au quotient des conjugués...
2. $z_1 + z_2 = \bar{z}_2 + z_2 = 2\Re(z_2) = \frac{8}{37}$ et $z_1 - z_2 = \bar{z}_2 - z_2 = -2i\Im(z_2) = i\frac{26}{37}$

Exercice 10/34

On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer j^2 .
2. En déduire les relations $1 + j + j^2 = 0$, $j^3 = 1$, $\frac{1}{j} = j^2 = \bar{j}$.

Solution :

1. $j^2 = \bar{j}$
2. Évident.

Exercice 11/34 : *

On considère la somme S définie par

$$S = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2020}.$$

1. Calculer i^3 , i^4 , i^5 et i^6 .
2. Déterminer, selon les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, la valeur de i^n .
3. Calculer la valeur de la somme S .

Solution :

- 1.
2. $i^n = \begin{cases} \text{si } n = 4k \text{ avec } k \in \mathbb{N} \text{ alors } i^n = 1 \\ \text{si } n = 4k + 1 \text{ avec } k \in \mathbb{N} \text{ alors } i^n = i \\ \text{si } n = 4k + 2 \text{ avec } k \in \mathbb{N} \text{ alors } i^n = -1 \\ \text{si } n = 4k + 3 \text{ avec } k \in \mathbb{N} \text{ alors } i^n = -i \end{cases}$
3. $S = 1$ (somme de termes d'une suite géométrique de raison i).

Exercice 12/34

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on pose $z = (2a - b - i(a + b))(-a - i(a + b))$.
A quelle(s) condition(s) sur a et b le nombre complexe z est-il réel ?

Solution : $a = b$ ou $a = -b$

Exercice 13/34

On pose $Z = 1 + iz$, où $z \in \mathbb{C}$. Démontrer que :

$$Z \text{ est réel} \iff z \text{ est imaginaire pur.}$$

Solution : Utiliser $\overline{\overline{Z}} = Z$

Exercice 14/34 : *

Soit z un nombre complexe différent de i , on pose $Z = \frac{z}{z - i}$. A quelle condition sur z le nombre complexe Z est-il un réel ?

Solution : z imaginaire pur.

Exercice 15/34

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z - (1 + i)\overline{z} = 3 + 5i$.

Solution : L'unique solution est $z = 7 + 4i$

Exercice 16/34

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1 + 2i)z = -1 + 3i$.

Solution : $z = 1 + i$

Exercice 17/34

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3\overline{z} = 4 - i$.

Solution : $z = \frac{4}{3} + i\frac{1}{3}$

Exercice 18/34

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

- | | |
|------------------------|--------------------------------------|
| 1. $(7 - i)z = 2$ | 4. $\frac{z + 1}{z - 1} = 2i$ |
| 2. $iz + 2i - 3 = 0$ | 5. $5\overline{z} = 3 - i$ |
| 3. $(3 + 5i)z = 1 - z$ | 6. $(1 + i)\overline{z} + 1 - i = 0$ |

Solution :

1. $\frac{7}{25} + i\frac{1}{25}$

2. $-2 - 3i$

3. $\frac{4}{41} - i\frac{5}{41}$

4. $-\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}$

5. $\frac{3+i}{5}$

6. i

Exercice 19/34

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3\bar{z} - 2iz = 5 - 3i$.

Solution : Poser $z = a + ib$, on trouve $z = \frac{9}{5} - \frac{i}{5}$

Exercice 20/34 : *

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3\bar{z} + 2 = 0$.

Solution : $\mathcal{S} = \left\{ 1, 2, -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{35}}{2}, -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{35}}{2} \right\}$

Exercice 21/34 : **

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 4i$.

Solution : $\mathcal{S} = \{ \sqrt{2} + i\sqrt{2}, -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \}$

Exercice 22/34

Soit a et b deux nombres complexes. Écrire le développement de $(a + b)^5$.

Solution : Écrire le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 5$.
 $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Exercice 23/34

Montrer que $(1 + \sqrt{3})^4 + (1 - \sqrt{3})^4$ est un entier naturel.

Solution : 56

Exercice 24/34

Développer les expressions suivantes.

1. $(1 + z)^6$ où $z \in \mathbb{C}$

2. $(1 - z)^6$ où $z \in \mathbb{C}$

3. $(1 + i)^5$

Solution :

1. $z^6 + 6z^5 + 15z^4 + 20z^3 + 15z^2 + 6z + 1$
2. $z^6 - 6z^5 + 15z^4 - 20z^3 + 15z^2 - 6z + 1$
3. $1 + 5i - 10 - 10i + 5 + i = -4 - 4i$

Exercice 25/34

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Sans effectuer de récurrence, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$$

Solution : Binôme de Newton

Exercice 26/34 : *

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $T_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$

Calculer $S_n + T_n$ et $S_n - T_n$. En déduire la valeur des sommes S_n et T_n .

Solution : $S_n = T_n = 2^{n-1}$ (utiliser l'astuce $(1+1)^n = \dots$ et $(1-1)^n = \dots$ avec le binôme.

Exercice 27/34 : **

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est un multiple de 7.

Solution : Il faut écrire $3 = 7 - 4$ et appliquer le binôme...

Exercice 28/34 : **

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$.

1. Montrer que $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$.
2. En déduire la valeur de $2S_n$, puis celle de S_n .

Solution :

1. $\forall k \in \mathbb{N}, \binom{2n+1}{k} = \binom{2n+1}{2n+1-k} \dots$
2. $S_n = 2^{2n}$

Exercice 29/34 : Vrai/Faux

1. La partie imaginaire d'un nombre complexe est un réel.
2. Le nombre complexe i est égal à sa partie imaginaire.
3. Pour $z, z' \in \mathbb{C}$ on a $\Re(z + z') = \Re(z) + \Re(z')$.
4. Pour $z, z' \in \mathbb{C}$ on a $\Re(z \times z') = \Re(z) \times \Re(z')$.

5. Pour tout nombre complexe z , $z + \bar{z}$ est un nombre réel.
6. Pour tout nombre complexe z , $z - \bar{z}$ est un nombre réel.
7. Pour tout nombre complexe z , $z \times \bar{z}$ est un nombre réel.
8. Si z est un nombre complexe tel que $z + \bar{z} = 0$ alors $z = 0$.
9. Si z est un nombre complexe tel que $z \times \bar{z} = 0$ alors $z = 0$.
10. Deux nombres complexes dont la somme et le produit sont réels, sont également réels.
11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n$
12. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$ est égal à 0.

Solution :

1. V
2. F
3. V
4. F
5. V
6. F
7. V
8. F
9. V
10. F
11. F
12. V

Exercice 30/34 : **

A quelles conditions sur a et b réels le nombre complexe

$$(2a - b - i(a + b))(-a - i(a + b))$$

est-il un nombre réel ?

Exercice 31/34 : **

Déterminer tous les complexes z tels que $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1 - z|$.

Exercice 32/34 : **

Pour quelles valeurs de n le nombre complexe $\left(\frac{(1 - i\sqrt{3})^5}{(1 - i)^3}\right)^n$ est-il un réel positif ?

Exercice 33/34 : **

Si z est un nombre complexe de module différent de 1, et si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\frac{|1 - z^n|}{|1 - z|} \leq \frac{1 - |z|^n}{1 - |z|}$$

Exercice 34/34 : **

Si a , b et c sont trois complexes de module 1, démontrer que $|ab + ac + bc| = |a + b + c|$