



Évaluation

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1/73

1. Donner la partie réelle de

$$z = 5 + 3i.$$

2. Quelle est la forme algébrique de

$$i^2 ?$$

3. Quelle est la partie imaginaire de

$$i^2 ?$$

4. Écrire le nombre complexe de partie réelle 5 et de partie imaginaire -3 .
5. Écrire le nombre complexe de partie réelle 0 et de partie imaginaire 5.

Exercice 2/73

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

- 7 est un nombre complexe.
- Tous les nombres réels sont des nombres complexes.
- Tous les nombres complexes sont des nombres réels.

Exercice 3/73

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants.

a. $z_1 = 5 + 8i$

f. $z_6 = 2 + \sqrt{2}$

j. $z_4 = -5i$

b. $z_2 = -2 + 3i$

g. $z_1 = 2 - 3i$

k. $z_1 = 5i - 3$

c. $z_3 = 7$

h. $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

l. $z_2 = \frac{5 + 8i}{2}$

d. $z_4 = 5i$

i. $z_3 = 4$

m. $z_3 = \frac{-2 + 3i}{-2}$

e. $z_5 = 2i + 1$

Exercice 4/73

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

- La partie imaginaire de $2 + 5i$ est $5i$.
- $2i$ est un imaginaire pur.
- La partie imaginaire de 4 est $4i$.

Exercice 5/73

La lettre i pour l'imaginaire a été employée la première fois par le mathématicien suisse Léonhard Euler (1707–1783) dans un mémoire présenté en 1777.

Avant cette date, les nombres complexes s'écrivaient par exemple $5 + \sqrt{-9}$ ou $2 - 3\sqrt{-1}$.

- Donner les formes algébriques de ces deux exemples.
- On souhaite calculer i^{2025} .
En remarquant que

$$2025 = 4 \times 506 + 1,$$

justifier que

$$i^{2025} = i.$$

- En vous inspirant de la question précédente, calculer

$$i^{3135}.$$

Exercice 6/73

Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

1. $z = 1 + i + 2\sqrt{2}$

2. $z = 5 - \sqrt{3}$

3. $z = 1 - i - i\sqrt{7}$

Exercice 7/73

Déterminer les parties réelle et imaginaire des nombres complexes suivants, sachant que a et b sont deux nombres réels.

$$z_1 = (a - 2) + bi \quad \text{et} \quad z_2 = 2a - 1 - (3 - b)i.$$

Exercice 8/73

Déterminer le nombre réel a tel que

$$2a + 5i = 4 + 5i.$$

Aide : Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, leurs parties réelles et imaginaires sont égales.

Exercice 9/73 : Exercice guidé

Déterminer les nombres réels a et b tels que :

$$(2a + 3) - 3i = 4a + (3b - 6)i.$$

Étape 1 : Identifier les parties réelles et imaginaires de chacun des nombres complexes.

$$(2a + 3) - 3i = 4a + (3b - 6)i.$$

Étape 2 : Écrire les égalités des parties réelles et des parties imaginaires. On obtient un système de deux équations à résoudre dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2a + 3 = 4a, \\ -3 = 3b - 6. \end{cases}$$

Étape 3 (à vous de jouer) : Résoudre chacune des équations du système pour déterminer a et b .

Exercice 10/73

Déterminer les réels a et b tels que :

$$(a + 2) + 3i = -4 + (5 + 3b)i.$$

Exercice 11/73

Déterminer les réels a et b tels que :

$$(-5a + 5) + (3b - 3)i = 5 + 6i.$$

Que peut-on dire du nombre complexe

$$z = a + bi ?$$

Exercice 12/73

a. À l'aide de la calculatrice, recopier et compléter le tableau :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
i^n								

b. Conjecturer les valeurs possibles de i^n en fonction des valeurs de n .

c. On souhaite calculer i^{2025} . En remarquant que $2025 = 4 \times 506 + 1$, justifier que $i^{2025} = i$.

d. En vous inspirant de la question précédente, calculer i^{3135} .

Exercice 13/73

1. Calculer $5 \times i^2$.

2. Donner la forme algébrique de $3 + 5i + (2 - 3i)$.

3. Donner la forme algébrique de $3 \times (5 + 3i)$.

4. Donner la partie imaginaire de :

$$3 + 5i - 2 - 3i.$$

5. Déterminer la partie réelle de

$$3 + 7i - 5 - 8i.$$

Exercice 14/73

1. Donner la partie imaginaire de

$$\frac{1}{2} \times (\sqrt{3} - i).$$

2. Donner la partie réelle de

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i).$$

3. Donner la partie imaginaire de

$$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i).$$

4. Déterminer la partie réelle de

$$4i \times (5 - 3i).$$

5. Donner la forme algébrique de

$$3 + 5i - (2 - 3i).$$

6. Donner la forme algébrique de

$$3i \times (5 + 3i).$$

Exercice 15/73

Calculer :

a. $(2 + 3i) + 3(5 - 2i)$

b. $4(3 + 2i) - 3(2 + 5i)$

c. $(1 - 5i)(2 + 4i)$

d. $(2 - 3i)(4 - 3i)$

Exercice 16/73

Calculer et simplifier :

$$(2i)^2; \quad (-2i)^2; \quad -3i^2; \quad (\sqrt{2}i)^2;$$

$$(-\sqrt{2}i)^2; \quad (3\sqrt{2}i)^2; \quad (-3\sqrt{2}i)^2.$$

Exercice 17/73

Effectuer les calculs suivants. Prendre :

a. Le triple de $5 - 3i$.

b. L'opposé de $-5 + 4i$.

c. Le produit de $(2 + 3i)$ et de $(2 + 5i)$.

d. Le produit de la somme de 5 et $2i$ par la différence de 3 et i .

Exercice 18/73

Effectuer les calculs suivants :

a. La somme de $5 + 3i$ et de l'opposé de $4i$.

b. La différence entre le carré de $3i$ et $7i$.

c. La somme entre l'opposé de $3 + 2i$ et le carré de $(1 + i)$.

Exercice 19/73

On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1 = -3 + 2i \quad \text{et} \quad z_2 = 5 - 4i.$$

Pour effectuer le calcul $z_1 - z_2$, Hakim et Anne utilisent leurs calculatrices.
Hakim écrit :

$$-3 + 2i - 5 - 4i$$

et obtient

$$-8 - 2i.$$

Anne écrit :

$$-3 + 2i - (5 - 4i)$$

et obtient

$$-8 + 6i.$$

Qui a raison ?

Exercice 20/73

Calculer :

- $(1 + 3i)^2$
- $(1 - 2i)^2$
- $(1 + 5i)(1 - 5i)$

Exercice 21/73

Calculer :

- $(3i + 2)^2$
- $(2 + 5i)^2$
- $(1 - 3i)^2$
- $(1 + 4i)(1 - 4i)$

Exercice 22/73

Soient

$$z_1 = 2 + 2i \quad \text{et} \quad z_2 = 1 - 2i.$$

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

- | | | |
|------------------|---------------------|------------|
| a. $z_1 + z_2$ | c. $z_1 \times z_2$ | e. z_1^3 |
| b. $2z_1 - 3z_2$ | d. z_1^2 | |

Exercice 23/73

Soient

$$z_1 = 1 - i \quad \text{et} \quad z_2 = 1 - \sqrt{3}i.$$

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

- | | |
|-----------------|---------------------|
| a. $z_1 - z_2$ | c. $z_1 \times z_2$ |
| b. $3z_1 - z_2$ | d. z_2^2 |

Exercice 24/73

Un circuit série RL est un circuit électrique contenant une résistance et une bobine, montées en série. Il est utilisé dans diverses applications, comme dans des convertisseurs de courant continu. Calculer la forme algébrique de l'impédance complexe Z du circuit.

On donne :

- l'impédance de la résistance $Z_R = R$, elle représente la partie réelle de Z ;
- l'impédance de la bobine

$$Z_L = j \times L \times 2\pi \times f,$$

elle représente la partie imaginaire de Z ;

- l'impédance complexe du circuit

$$Z = Z_R + Z_L;$$

- $R = 1$, $L = 0,142$ H et $f = 13,5$ Hz.

Exercice 25/73

Soit le nombre complexe

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Montrer que z_1 est racine du polynôme

$$P(z) = z^2 + z + 1.$$

Exercice 26/73

Le nombre complexe

$$z_2 = -2 + 3i$$

est-il solution de l'équation

$$3 + 2i - iz = 0 ?$$

Exercice 27/73

On s'intéresse à l'équation

$$z^4 - 16 = 0.$$

- Montrer que $z = 2i$ est une solution.

- b. En déduire l'ensemble des solutions complexes de l'équation

$$z^4 - 16 = 0.$$

Exercice 28/73

Résoudre l'équation

$$Z^2 = -3$$

et en déduire les solutions de l'équation

$$(z - 1)^2 = -3.$$

Exercice 29/73

Donner la forme algébrique des nombres suivants :

- $(1 + \sqrt{2}i) \times (1 - \sqrt{2}i)$
- $(1 + \sqrt{3}i)^2$
- $(\sqrt{2} + i)^2$

Exercice 30/73

Donner la forme algébrique des nombres suivants :

- $i(1 + i)^2$
- $i^5(2 + 2i)$

Exercice 31/73

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : 1.

- $z^2 = -16$
- $z^2 = -5$
- $z^2 = -1$
- $z^2 = -18$

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ des équations suivantes :

- $(z - 3i)^2 = -16$
- $(z + 2)^2 = -5$
- $(z + i)^2 = 1$
- $(z + 4i\sqrt{2})^2 = -18$

Exercice 32/73

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f(z) = z^2 + 6z + 12.$$

- a. Montrer que

$$f(z) = (z + 3)^2 + 3.$$

- b. Résoudre l'équation

$$f(z) = 0.$$

Exercice 33/73

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. Les résultats doivent être donnés sous forme algébrique.

- $2z - 5i = 5z - 2$
- $3(2z - 4i) = 4z - 7i$
- $2iz - 7 = 0$
- $(3 + 4i)z = 3$
- $2z + 3 = iz - 5i$
- $(2z - 7i + 3)(z + 4i) = 0$

Exercice 34/73

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

- $z^2 = 16$
- $z^2 = -4$
- $z^2 = -9$
- $(z - 3)^2 = -56$
- $2z^2 - 18 = 0$

Exercice 35/73

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f(z) = z^2 + 4z + 6.$$

- a. Déterminer le nombre réel a tel que

$$f(z) = (z + 2)^2 + a.$$

- b. Résoudre l'équation

$$f(z) = 0.$$

Exercice 36/73

En vous aidant de la méthode des exercices 45 et 46, résoudre les équations suivantes :

- $z^2 + 2z + 4 = 0$
- $z^2 - 4z + 5 = 0$
- $z^2 + z + 1 = 0$

Exercice 37/73

Dans son livre **Éléments d'Algèbre**, écrit en 1765, le mathématicien suisse Leonhard Euler s'intéresse à la résolution de l'équation

$$x^3 = 6x + 4$$

et propose une solution.

Par exemple, dans l'équation $x^3 = 6x + 4$, on a $f = 6$ et $g = 4$; de sorte que

$x = \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{-1}}$, ce qui ne peut s'exprimer d'une manière différente.

- Comment écrivions-nous aujourd'hui $\sqrt{-1}$?
- Déterminer à la calculatrice la valeur de

$$\sqrt[3]{2 + 2i} \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{2 - 2i}.$$

En déduire la valeur de x .

- En représentant graphiquement une fonction judicieusement choisie, déterminer à l'aide des outils graphiques de la calculatrice les autres solutions de l'équation.

Exercice 38/73

En informatique, le temps de calcul d'une multiplication est supérieur à celui d'une addition ou soustraction. Dans cet exercice, nous allons mettre en place, sur deux nombres complexes, un algorithme de calcul de produit.

Cet algorithme, utilisé dans les microprocesseurs pour le produit de deux grands nombres réels, permet de réduire significativement cette durée de calcul, en diminuant le nombre de multiplications nécessaires. On doit cette méthode au mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855). On considère deux nombres complexes $z_1 = a + ib$ et $z_2 = a' + ib'$.

- Donner la forme algébrique de $z_1 \times z_2$.
- (a) On pose $p_1 = aa'$, $p_2 = bb'$ et $p_3 = (a + b)(a' + b')$.
Montrer que $z_1 \times z_2 = (p_1 - p_2) + i(p_3 - p_2 - p_1)$.
(b) Vérifier la cohérence des résultats avec par exemple $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = -1 + 4i$.
- Compter le nombre de multiplications, de soustractions et d'additions constituant le résultat pour la question 1, puis pour la question 2a. Conclure.

Exercice 39/73

- Donner le conjugué du conjugué de $1 + 3i$.
- Donner le conjugué de $-5 + 2i$.
- Donner la partie imaginaire de $1 - 5i$.
- Calculer $(1 + i) - \overline{1 + i}$.
- Donner le conjugué de 7.

Exercice 40/73

Dans chaque cas, donner le conjugué du nombre complexe z :

- $z = 5 + 2i$
- $z = -5$

- $z = -4i$
- $z = 2i$

Exercice 41/73

Dans chaque cas, donner le conjugué du nombre complexe z :

- $z = 3i - 2$
- $z = i$
- $z = 5 - 4i$
- $z = -1 - 3i$

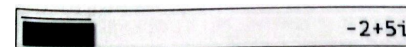
Exercice 42/73

Soit le nombre complexe $z = 1 + 3i$. Calculer :

- $z + \bar{z}$
- $z - \bar{z}$
- $z \times \bar{z}$

Exercice 43/73

Sur l'affichage d'une calculatrice, un nombre complexe a été caché.



Quel était ce nombre ?

Exercice 44/73

calculer le produit

$$z \times \bar{z}$$

dans chacun des cas proposés.

- | | | |
|------------------|------------------|----------------|
| a. $z = 2 - 3i$ | c. $z = 4i$ | e. $z = -4$ |
| b. $z = -3 + 5i$ | d. $z = -2 - 5i$ | f. $z = 3 + i$ |

Exercice 45/73

Donner la forme algébrique des nombres complexes proposés.

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| a. $z_1 = \frac{1-i}{1+i}$ | d. $z_4 = \frac{3+i}{-2i+2}$ | h. $z_8 = \frac{1}{3-2i}$ |
| b. $z_2 = \frac{3+2i}{2+2i}$ | e. $z_5 = \frac{3i}{2+3i}$ | i. $z_9 = \frac{1}{-4i}$ |
| c. $z_3 = \frac{5}{1-i}$ | f. $z_6 = i - \frac{1}{i}$ | j. $z_{10} = \frac{1}{-4i+2}$ |
| | g. $z_7 = \frac{1}{1+i}$ | |

Exercice 46/73

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes :

$$\bullet \frac{1}{\sqrt{3} + 2i} \quad \bullet \frac{1 + 4i}{1 - \sqrt{2}i} \quad \bullet 2 + i\sqrt{3}(5 - i) + \frac{1}{2} + 3i^2 \bullet i^3 \quad \bullet \frac{1}{i} \quad \bullet i^4 \quad \bullet i^5 \quad \bullet i^6$$

Exercice 47/73

Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes :

1. $(2 + 3i) + (-1 + 6i)$
2. $(5 - i) - (2 - 8i)$
3. $(1 - i)(4 - 2i)$
4. $\frac{4 - i}{5 - 3i}$
5. $(2 - 2i)^2$
6. $(x + iy)(x' + iy')$
7. $(x + iy)^2$
8. $(2 - 3i)(2 + 3i)$
9. $(a + ib)(a - ib)$

Exercice 48/73

Effectuer les calculs suivants et donner les réponses sous forme algébrique :

- a. L'inverse de $2 + 3i$.
- b. Le conjugué de $5 + 3i$.
- c. Le quotient de $2 + i$ par $1 - i$.
- d. L'inverse du conjugué de $4 - 5i$.
- e. Le conjugué du conjugué de $4 - 3i$.

Exercice 49/73

Un circuit RC est un circuit électrique composé d'une résistance et d'un condensateur montés ici en série. Ces circuits RC permettent de réaliser des filtres électroniques passe-bas qui laissent passer les basses fréquences et qui atténuent les hautes fréquences.

Très utilisés dans le domaine audio, ils aident les artistes et les ingénieurs du son à équilibrer les pistes audio, en supprimant les hautes fréquences inutiles.

Calculer la forme algébrique de l'impédance complexe Z du circuit, avec

$$Z = Z_R + Z_C,$$

où

$$Z_R = R, \quad Z_C = \frac{1}{jC2\pi f},$$

et

$$R = 1\,\Omega, \quad C = 0,001\,\text{F}, \quad f = 13,5\,\text{Hz}.$$

Exercice 50/73

On considère deux dipôles Z_1 et Z_2 en parallèle.

On donne

$$Z_1 = -1,5 + 2j \quad \text{et} \quad Z_2 = 3 - 4j.$$

Donner la forme algébrique de l'impédance Z de l'ensemble.

Exercice 51/73

On considère un circuit composé d'une résistance et d'une bobine, montés en parallèle.

Ce circuit est composé d'une résistance de $2\,\Omega$ et d'une bobine de $0,0001\,\text{H}$ montées en parallèle et raccordées sur un générateur dont la fréquence f vaut $15\,000\,\text{Hz}$.

Calculer la forme algébrique de l'impédance complexe Z du circuit.

Exercice 52/73

On considère un circuit composé d'une résistance, d'un condensateur et d'une bobine, montés ici en parallèle.

Les circuits RLC sont généralement utilisés pour réaliser des filtres de fréquence.

Un circuit est composé d'une résistance de $1500\,\Omega$, d'un condensateur de $0,000560\,\text{F}$ et d'une bobine de $0,000125\,\text{H}$ montés en parallèle et raccordés sur un générateur dont la fréquence f vaut $18\,000\,\text{Hz}$.

Calculer la forme algébrique de l'impédance complexe Z du circuit.

Exercice 53/73

P est un polynôme de degré 2, à coefficients réels, défini par

$$P(z) = az^2 + bz + c,$$

où a , b et c sont trois nombres réels.

1. Montrer que si z_1 est une solution de l'équation $P(z) = 0$, alors $\bar{z}_1$ aussi.
2. Application : on admet que $1 - i\sqrt{3}$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.
 - a. Donner l'autre solution de cette équation.
 - b. On sait que $P(0) = 8$. Donner les expressions développée et factorisée du polynôme P .

Exercice 54/73

On considère le polynôme P défini par

$$P(z) = z^3 - 1$$

et le nombre complexe

$$j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

- a. Montrer que $\bar{j} = j^2$.
- b. Calculer $1 + j + j^2$.
- c. Montrer que j est une solution de l'équation $P(z) = 0$.
- d. Déterminer les deux autres solutions de cette équation.

Exercice 55/73

Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = 2z(1 - z).$$

- Calculer l'image de $z_1 = 1 + 2i$ par f .
- Calculer les antécédents de 0 par f .
- Déterminer les nombres complexes z invariants par f , c'est-à-dire tels que $f(z) = z$.
- Déterminer les nombres complexes ayant une image réelle par f .

Exercice 56/73

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(1 + 3i)(z - 2i) = -2.$$

Exercice 57/73

Déterminer la solution complexe de l'équation suivante :

$$2z + 5 + 3i = 2 - 4i.$$

Exercice 58/73

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(2 + i)z - 3 = 2 + 4i.$$

Exercice 59/73

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(2 + 3i)(z - 3i) = 5i.$$

Exercice 60/73

Pour z différent de i , déterminer la solution complexe de

$$\frac{z + 4}{z - i} = 4i.$$

Exercice 61/73

Pour z différent de $3i$, déterminer la solution complexe de

$$\frac{z - 4i}{z - 3i} = 2 + 5i.$$

Exercice 62/73

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$3\bar{z} + 2iz = -3 - 7i.$$

Exercice 63/73

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z (on donnera la ou les solutions sous forme algébrique).

- $2z + i\bar{z} = 3$
- $iz + 3\bar{z} = 2 - 2i$
- $z + 2i = iz - 1$
- $(3 + 2i)(z - 1) = i$
- $(2 - i)z + 1 = (3 + 2i)z - i$
- $(4 - 2i)z^2 = (1 + 5i)z$
- $\frac{z}{1 - i} = -1 + 3i$

Exercice 64/73

Déterminer, dans chaque cas, le nombre complexe z sachant que :

- $z + \bar{z} = -6$ et $z - \bar{z} = 2\sqrt{5}$
- $z + \bar{z} = 1$ et $z - \bar{z} = \sqrt{3}$

Exercice 65/73

- Donner le conjugué de $(2 + 35i) + (1 + 3i)$.
- Donner le conjugué de $(2 + 3i) - (3 + 5i)$.
- Donner le conjugué de $-3(5 + i)$.
- Donner le conjugué de $i \times (1 + i)$.
- Donner le conjugué de $\frac{1}{i}$.

Exercice 66/73

Déterminer le conjugué de chaque expression puis donner sa forme algébrique :

- $z_1 = (2 + 3i) + (4 - 2i)$
- $z_2 = -4i - (3 - 5i)$
- $z_3 = (2 + 4i) - (2 - 4i)$

Exercice 67/73

Déterminer le conjugué de chaque expression puis donner sa forme algébrique :

- $z_1 = 3i(3 - 5i)$
- $z_2 = (1 + 2i)(1 - 2i)$
- $z_3 = (2 + 4i) + 5(4 - 5i)$

d. $z_4 = 2i(2 + 5i) - 4(1 - 2i)$

Exercice 68/73

Déterminer le conjugué de chaque expression puis donner sa forme algébrique :

- a. $z_1 = \frac{7}{2i}$
 b. $z_2 = \frac{1}{3 + 5i}$
 c. $z_3 = \frac{2i}{1 + i}$
 d. $z_4 = \frac{2 + 3i}{1 - i}$

Exercice 69/73

On donne

$$z_1 = 2 + 3i \quad \text{et} \quad z_2 = 1 - 2i.$$

- a. Déterminer la forme algébrique de

$$Z = z_1 + z_2$$

et en déduire $\bar{Z}$.

- b. Déterminer les conjugués $\bar{z}_1$ et $\bar{z}_2$ puis calculer

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

- c. Que peut-on dire de $\bar{Z}$ et de

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 ?$$

- d. Reprendre les questions précédentes dans le cas où

$$z_1 = a + bi \quad \text{et} \quad z_2 = a' + b'i,$$

avec a, a', b et b' réels.

Exercice 70/73

On donne

$$z_1 = 1 + 2i \quad \text{et} \quad z_2 = 2 - 3i.$$

- a. Déterminer la forme algébrique de

$$Z = z_1 \times z_2$$

et en déduire $\bar{Z}$.

- b. Déterminer les conjugués $\bar{z}_1$ et $\bar{z}_2$ puis calculer

$$\bar{z}_1 \times \bar{z}_2.$$

- c. Que peut-on dire de $\bar{Z}$ et de

$$\bar{z}_1 \times \bar{z}_2 ?$$

Exercice 71/73

Soit z , un nombre complexe non nul, de forme algébrique

$$z = a + bi.$$

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a. $z_1 = i \times z \times \bar{z}$

b. $z_2 = \frac{\bar{z}}{z}$

c. $z_3 = \frac{iz}{\bar{z}}$

Exercice 72/73

Les nombres complexes apparaissent vers le milieu du XVI^e siècle pour la résolution d'équations du troisième degré.

Dans **Ars Magna** (1547), le mathématicien italien Jérôme Cardan (1501–1576) affirme qu'une racine de l'équation du troisième degré

$$x^3 = px + q$$

est

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}.$$

Il sera amené à utiliser, pour ses calculs, la racine carrée d'un nombre négatif, nombre qu'il appellera **ra sophistica**. C'est un autre scientifique italien, Raphaël Bombelli (1526–1572), qui mettra en place les règles de calcul sur ces quantités que l'on appellera alors les **impossibles** avant de leur donner le nom d'imaginaires.

Partie A

Dans son livre **Algebra**, publié en 1550 et écrit en italien, pour désigner l'expression $20x$, Bombelli écrivait $\frac{1}{20}$ pour $20x$ et $\frac{2}{4}$ pour $4x^2$.

m . signifiait **moins** et p . signifiait **plus**.

Voici un extrait de son cahier.

24. m. $\frac{1}{20}$. Eguale à 4. m. 16. p. 16.

1. Quelle est l'équation posée par Bombelli ?
2. Montrer que 1 et -2 sont des solutions de cette équation.

Partie B

Résolution de l'équation du troisième degré

$$x^3 = px + q,$$

où p et q sont deux nombres réels.

1. Résolution guidée sans nombre complexe

On souhaite déterminer une racine x_0 de l'équation

$$x^3 = 6x + 6.$$

- a. En utilisant les outils graphiques de la calculatrice, déterminer l'intersection de la courbe d'équation

$$f(x) = x^3 - 6x - 6$$

avec l'axe des abscisses. En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de x_0 .

- b. Avec la formule de Cardan, montrer que

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} = 1$$

puis donner la valeur exacte de x_0 .

2. Résolution guidée avec des nombres complexes

On souhaite déterminer une racine x_0 de l'équation

$$x^3 = 51x + 104.$$

- a. Montrer que

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} = -2209.$$

- b. En calculant $(47i)^2$, déterminer $\sqrt{-2209}$.

- c. En déduire que

$$x_0 = \sqrt[3]{47i + 52} - \sqrt[3]{47i - 52}.$$

- d. Déterminer les formes algébriques de

$$(4 + i)^3 \quad \text{et} \quad (-4 + i)^3.$$

- e. En déduire que

$$x_0 = 8.$$

3.

Les textes mathématiques de l'époque étaient souvent écrits en latin. Par exemple, l'équation

$$x^3 = 51x + 104$$

s'écrivait

$$C \text{ aequat}ur 51 R p.104$$

où :

- C désigne le cube de l'inconnue ;
- R désigne l'inconnue, la chose (**res** en latin) ;
- **aequat**ur signifie é s'égale à ;
- $m.$ et $p.$ signifient moins et plus (**minus** et **plus** en latin).

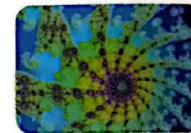
Résoudre l'équation suivante :

$$C \text{ aequat}ur 30 R p.36.$$

Aide : vous aurez besoin de calculer $(26i)^2$, puis $(3 + i)^3$ et $(-3 + i)^3$.

Exercice 73/73

La définition des suites de nombres réels peut être généralisée à des suites de nombres complexes. Ces suites sont souvent utilisées pour générer des fractales (formes géométriques qui se répètent de manière identique, même quand on change d'échelle.



On considère une suite (z_n) de nombres complexes définie par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = q \times z_n,$$

où q est un nombre complexe et n un entier naturel.

On définit trois suites de nombres réels (a_n) , (b_n) et (c_n) par

$$a_n = \Re(z_n), \quad b_n = \Im(z_n), \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Partie A

Dans cette question, on prend

$$q = i.$$

- Donner a_0 , b_0 et c_0 .
- Déterminer z_1 , a_1 , b_1 et c_1 .
- Recopier et compléter le tableau suivant.

n	z_n	a_n	b_n	c_n
2				
3				
4				

- Comment semble être la suite (c_n) ?

2. Reprendre les questions de la partie A avec

$$q = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{et} \quad z_0 = 1.$$

Partie B

Dans cette partie, on prend

$$q = -1 + 2i.$$

- En utilisant la relation

$$z_{n+1} = q \times z_n,$$

montrer que

$$a_{n+1} = -a_n - 2b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = -b_n + 2a_n.$$

- À l'aide d'un tableau, on a déterminé les valeurs de a_n , b_n et c_n pour quelques valeurs de n .

	A	B	C	D
1	n	a _n	b _n	c _n
2		0	1	0
3		1	-1	2
4		2	-3	-4
5		3	11	-2
6		4	-7	24
7		5	-41	-38
8		6	117	-44
9		7	-29	278
10		8	-527	-336

- Quelle formule doit-on rentrer dans la cellule D2 pour obtenir, par recopiage vers le bas, les valeurs de c_n ?
- Quelles formules doit-on entrer dans les cellules B3 et C3 pour obtenir, par recopiage vers le bas, les valeurs de a_n et b_n ?
- Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation de la suite (c_n) et sur ses valeurs ?

Partie C

Dans cette partie, on prend

$$q = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

- Donner z_1 puis déterminer, à l'aide de la calculatrice, z_2 , z_3 et z_4 .
 - Recopier et compléter le tableau :

n	z_n	a_n	b_n	c_n
2				
3				
4				

- On souhaite automatiser les calculs en utilisant le logiciel Python.
 - L'instruction

`z=complex(a,b)`

permet de définir le complexe $z = a + bi$.

Définir le nombre complexe q en complétant le script suivant :

```
2 q=complex( , )
```

- Compléter la fonction suivante permettant de calculer les valeurs de z_n , où $z_n = q^n$.

```
def puissance_z(n):
    z=
    for i in range( ):
        z=
    return( )
```

- Compléter la fonction suivante permettant de calculer les valeurs de c_n .

```
def c(n):
    z=puissance_z(n)
    a=z.real
    b=z.imag
    c=
    return( )
```

- Voici le script d'une fonction affichant la liste des valeurs de la suite (c_n) .

```
16 def liste_valeurs_c(n):
17     L=[]
18     for i in range(n):
19         d=c(i)
20         L.append(d)
21     return L
```

Quelle est l'utilité de la ligne 17 ? Et de la ligne 20 ?

- Les termes c_{15} , c_{16} , ..., c_{20} sont donnés dans la liste ci-dessous :

```
[0.008, 0.006, 0.004, 0.003, 0.002, 0.001]
```

Quel semble être le sens de variation de la suite (c_n) ? De quelle valeur semblent se rapprocher les termes de cette suite ?

- On souhaite écrire une fonction Python qui détermine l'indice n_0 à partir duquel les termes de la suite (c_n) deviennent inférieurs à 10^{-6} .
Compléter le script suivant :

```
def seuil():
    n=
    d=c(n)
    while d >= 10^-6:
        n=
        d=c(n)
    return( )
```

Interpréter le résultat suivant, obtenu dans la console Python :

```
>>> seuil()
40
```