



Exercices

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1/34

On pose $z_1 = -2 + 3i$ et $z_2 = 5 + 4i$.

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$.

Exercice 2/34

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1. $i - (2 + 3i)$

2. $(4 + i)(-5 + 2i)$

3. $2(6 - 5i) - 3(4 + 2i)$

4. $(5 + 3i)^2$

5. $(5 + 3i)(5 - 3i)$

6. $(1 - i)^2$

7. $(i + 1)(i - 1) + 2$

8. $2 + i\sqrt{3} + \left(\frac{1}{2} + 3i\right)^2$

Exercice 3/34

On pose $z_1 = 1 - 2i$ et $z_2 = 3 + i$.

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes $\frac{1}{z_1}$ et $\frac{z_1}{z_2}$.

Exercice 4/34

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1. $\frac{1}{i}$

2. $\frac{1}{1 - i}$

3. $\frac{1}{3 - 4i}$

4. $\frac{i}{-2 + i}$

5. $\frac{3 - 2i}{i}$

6. $\frac{3 + 5i}{5 - 3i}$

7. $\frac{1}{(3 - i)(-1 + 2i)}$

8. $\frac{1 - 3i}{(-1 + 2i)(1 - i)}$

Exercice 5/34

Soit a et b deux réels. On pose $z_1 = a + 3i - i(b - 2i)$ et $z_2 = 3 + i$.

A quelle(s) condition(s) sur a et b les nombres complexes z_1 et z_2 sont-ils égaux ?

Exercice 6/34

Déterminer, sous forme algébrique, le conjugué de chacun des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = 3 - 11i$

4. $z_4 = (3 + i)(-11 - 2i)$

2. $z_2 = 8i$

5. $z_5 = (1 - 2i)^2$

3. $z_3 = 2i - 7$

6. $z_6 = \frac{2 - 3i}{8 + 6i}$

Exercice 7/34

Soit z un nombre complexe, on pose $Z = z^2 + \bar{z}^2$.
Montrer que Z est un nombre réel.

Exercice 8/34

Soit z un nombre complexe, on pose $Z = z^2 - \bar{z}^2$.
Montrer que Z est un imaginaire pur.

Exercice 9/34

On considère les nombres complexes $z_1 = \frac{3 - i}{5 + 7i}$ et $z_2 = \frac{3 + i}{5 - 7i}$.

1. Vérifier que $z_1 = \bar{z}_2$.
2. En déduire que $z_1 + z_2$ est réel, que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur et les calculer.

Exercice 10/34

On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer j^2 .
2. En déduire les relations $1 + j + j^2 = 0$, $j^3 = 1$, $\frac{1}{j} = j^2 = \bar{j}$.

Exercice 11/34 : *

On considère la somme S définie par

$$S = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2020}.$$

1. Calculer i^3 , i^4 , i^5 et i^6 .
2. Déterminer, selon les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, la valeur de i^n .
3. Calculer la valeur de la somme S .

Exercice 12/34

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on pose $z = (2a - b - i(a + b))(-a - i(a + b))$.
A quelle(s) condition(s) sur a et b le nombre complexe z est-il réel ?

Exercice 13/34

On pose $Z = 1 + iz$, où $z \in \mathbb{C}$. Démontrer que :

$$Z \text{ est réel} \iff z \text{ est imaginaire pur.}$$

Exercice 14/34 : *

Soit z un nombre complexe différent de i , on pose $Z = \frac{z}{z-i}$. A quelle condition sur z le nombre complexe Z est-il un réel ?

Exercice 15/34

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z - (1+i)\bar{z} = 3 + 5i$.

Exercice 16/34

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+2i)z = -1 + 3i$.

Exercice 17/34

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3\bar{z} = 4 - i$.

Exercice 18/34

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

- | | |
|----------------------|-------------------------------|
| 1. $(7-i)z = 2$ | 4. $\frac{z+1}{z-1} = 2i$ |
| 2. $iz + 2i - 3 = 0$ | 5. $5\bar{z} = 3 - i$ |
| 3. $(3+5i)z = 1 - z$ | 6. $(1+i)\bar{z} + 1 - i = 0$ |

Exercice 19/34

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3\bar{z} - 2iz = 5 - 3i$.

Exercice 20/34 : *

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3\bar{z} + 2 = 0$.

Exercice 21/34 : **

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 4i$.

Exercice 22/34

Soit a et b deux nombres complexes. Écrire le développement de $(a+b)^5$.

Exercice 23/34

Montrer que $(1 + \sqrt{3})^4 + (1 - \sqrt{3})^4$ est un entier naturel.

Exercice 24/34

Développer les expressions suivantes.

1. $(1 + z)^6$ où $z \in \mathbb{C}$
2. $(1 - z)^6$ où $z \in \mathbb{C}$
3. $(1 + i)^5$

Exercice 25/34

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Sans effectuer de récurrence, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Exercice 26/34 : *

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $T_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$

Calculer $S_n + T_n$ et $S_n - T_n$. En déduire la valeur des sommes S_n et T_n .

Exercice 27/34 : **

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est un multiple de 7.

Exercice 28/34 : **

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$.

1. Montrer que $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$.
2. En déduire la valeur de $2S_n$, puis celle de S_n .

Exercice 29/34 : Vrai/Faux

1. La partie imaginaire d'un nombre complexe est un réel.
2. Le nombre complexe i est égal à sa partie imaginaire.
3. Pour $z, z' \in \mathbb{C}$ on a $\Re(z + z') = \Re(z) + \Re(z')$.
4. Pour $z, z' \in \mathbb{C}$ on a $\Re(z \times z') = \Re(z) \times \Re(z')$.
5. Pour tout nombre complexe z , $z + \bar{z}$ est un nombre réel.
6. Pour tout nombre complexe z , $z - \bar{z}$ est un nombre réel.
7. Pour tout nombre complexe z , $z \times \bar{z}$ est un nombre réel.
8. Si z est un nombre complexe tel que $z + \bar{z} = 0$ alors $z = 0$.
9. Si z est un nombre complexe tel que $z \times \bar{z} = 0$ alors $z = 0$.

10. Deux nombres complexes dont la somme et le produit sont réels, sont également réels.
11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n$
12. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$ est égal à 0.

Exercice 30/34 : **

A quelles conditions sur a et b réels le nombre complexe

$$(2a - b - i(a + b))(-a - i(a + b))$$

est-il un nombre réel ?

Exercice 31/34 : **

Déterminer tous les complexes z tels que $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1 - z|$.

Exercice 32/34 : **

Pour quelles valeurs de n le nombre complexe $\left(\frac{(1 - i\sqrt{3})^5}{(1 - i)^3}\right)^n$ est-il un réel positif ?

Exercice 33/34 : **

Si z est un nombre complexe de module différent de 1, et si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\frac{|1 - z^n|}{|1 - z|} \leq \frac{1 - |z|^n}{1 - |z|}$$

Exercice 34/34 : **

Si a , b et c sont trois complexes de module 1, démontrer que $|ab + ac + bc| = |a + b + c|$