Exercices

Nombres complexes 1

Exercice 1/29

On pose $z_1 = -2 + 3i$ et $z_2 = 5 + 4i$.
Écrire sous forme algébrique les nombres complexes $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$.

Exercice 2/29

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1. $i - (2 + 3i)$
2. $(4 + i)(-5 + 2i)$
3. $2(6 - 5i) - 3(4 + 2i)$
4. $(5 + 3i)^2$
5. $(5 + 3i)(5 - 3i)$
6. $(1 - i)^2$
7. $(i + 1)(i - 1) + 2$
8. $2 + i\sqrt{3} + \left(\frac{1}{2} + 3i\right)^2$

Exercice 3/29

On pose $z_1 = 1 - 2i$ et $z_2 = 3 + i$.
Écrire sous forme algébrique les nombres complexes $\dfrac{1}{z_1}$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Exercice 4/29

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1. $\dfrac{1}{i}$
2. $\dfrac{1}{1 - i}$
3. $\dfrac{1}{3 - 4i}$
4. $\dfrac{i}{-2 + i}$
5. $\dfrac{3 - 2i}{i}$
6. $\dfrac{3 + 5i}{5 - 3i}$
7. $\dfrac{1}{(3 - i)(-1 + 2i)}$
8. $\dfrac{1 - 3i}{(-1 + 2i)(1 - i)}$

Exercice 5/29

Soit a et b deux réels. On pose $z_1 = a + 3i - i(b - 2i)$ et $z_2 = 3 + i$.
A quelle(s) condition(s) sur a et b les nombres complexes z_1 et z_2 sont-ils égaux ?

Exercice 6/29

Déterminer, sous forme algébrique, le conjugué de chacun des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = 3 - 11i$
2. $z_2 = 8i$
3. $z_3 = 2i - 7$
4. $z_4 = (3 + i)(-11 - 2i)$
5. $z_5 = (1 - 2i)^2$
6. $z_6 = \dfrac{2 - 3i}{8 + 6i}$

Exercice 7/29

Soit z un nombre complexe, on pose $Z = z^2 + \overline{z}^2$.
Montrer que Z est un nombre réel.

Exercice 8/29

Soit z un nombre complexe, on pose $Z = z^2 - \overline{z}^2$.
Montrer que Z est un imaginaire pur.

Exercice 9/29

On considère les nombres complexes $z_1 = \dfrac{3 - i}{5 + 7i}$ et $z_2 = \dfrac{3 + i}{5 - 7i}$.

1. Vérifier que $z_1 = \overline{z_2}$.
2. En déduire que $z_1 + z_2$ est réel, que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur et les calculer.

Exercice 10/29

On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer j^2.
2. En déduire les relations $1 + j + j^2 = 0$, $j^3 = 1$, $\dfrac{1}{j} = j^2 = \overline{j}$.

Exercice 11/29 : *

On considère la somme S définie par

$$S = 1 + i + i^2 + i^3 + ... + i^{2020}.$$

1. Calculer i^3, i^4, i^5 et i^6.
2. Déterminer, selon les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, la valeur de i^n.
3. Calculer la valeur de la somme S.

Exercice 12/29

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on pose $z = (2a - b - i(a + b))(-a - i(a + b))$.
A quelle(s) condition(s) sur a et b le nombre complexe z est-il réel ?

Exercice 13/29

On pose $Z = 1 + iz$, où $z \in \mathbb{C}$. Démontrer que :

$$Z \text{ est réel } \iff z \text{ est imaginaire pur.}$$

Exercice 14/29 : *

Soit z un nombre complexe différent de i, on pose $Z = \dfrac{z}{z-i}$. A quelle condition sur z le nombre complexe Z est-il un réel ?

Exercice 15/29

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z - (1+i)\overline{z} = 3 + 5i$.

Exercice 16/29

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+2i)z = -1 + 3i$.

Exercice 17/29

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3\overline{z} = 4 - i$.

Exercice 18/29

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $(7-i)z = 2$
2. $iz + 2i - 3 = 0$
3. $(3+5i)z = 1 - z$
4. $\dfrac{z+1}{z-1} = 2i$
5. $5\overline{z} = 3 - i$
6. $(1+i)\overline{z} + 1 - i = 0$

Exercice 19/29

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3\overline{z} - 2iz = 5 - 3i$.

Exercice 20/29 : *

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3\overline{z} + 2 = 0$.

Exercice 21/29 : **

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 4i$.

Exercice 22/29

Soit a et b deux nombres complexes. Écrire le développement de $(a+b)^5$.

Exercice 23/29

Montrer que $(1+\sqrt{3})^4 + (1-\sqrt{3})^4$ est un entier naturel.

Exercice 24/29

Développer les expressions suivantes.

1. $(1+z)^6$ où $z \in \mathbb{C}$
2. $(1-z)^6$ où $z \in \mathbb{C}$
3. $(1+i)^5$

Exercice 25/29

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Sans effectuer de récurrence, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geq 1+nx$$

Exercice 26/29 : *

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \text{k pair}}} \binom{n}{k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \text{k impair}}} \binom{n}{k}$

Calculer $S_n + T_n$ et $S_n - T_n$. En déduire la valeur des sommes S_n et T_n.

Exercice 27/29 : **

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est un multiple de 7.

Exercice 28/29 : **

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

1. Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$.
2. En déduire la valeur de $2S_n$, puis celle de S_n.

Exercice 29/29 : Vrai/Faux

1. La partie imaginaire d'un nombre complexe est un réel.
2. Le nombre complexe i est égal à sa partie imaginaire.
3. Pour $z, z' \in \mathbb{C}$ on a $\mathfrak{Re}(z+z') = \mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Re}(z')$.
4. Pour $z, z' \in \mathbb{C}$ on a $\mathfrak{Re}(z \times z') = \mathfrak{Re}(z) \times \mathfrak{Re}(z')$.
5. Pour tout nombre complexe z, $z + \overline{z}$ est un nombre réel.
6. Pour tout nombre complexe z, $z - \overline{z}$ est un nombre réel.
7. Pour tout nombre complexe z, $z \times \overline{z}$ est un nombre réel.
8. Si z est un nombre complexe tel que $z + \overline{z} = 0$ alors $z = 0$.
9. Si z est un nombre complexe tel que $z \times \overline{z} = 0$ alors $z = 0$.

10. Deux nombres complexes dont la somme et le produit sont réels, sont également réels.
11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$
12. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$ est égal à 0.