Exercices

Nombres complexes

Exercice 1/23

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équation suivantes. Les résultats doivent être données sous forme algébrique.

1. $2z - 5i = 5z - 2$
2. $3(2z - 4i) = 4z - 7i$
3. $2iz - 7 = 0$
4. $(3 + 4i)z = 3$
5. $2z + 3 = iz - 5i$
6. $(2z - 7i + 3)(z + 4i) = 0$

Exercice 2/23

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équation suivantes.

1. $z^2 = 6$
2. $z^2 = -4$
3. $z^2 = -25$
4. $(z - 3)^2 = -49$
5. $2z^2 + 18 = 0$

Exercice 3/23

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$. Soient les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -2 - 2i$, $z_B = 1 - 3i$, $z_C = 3 + 4i$ et $z_D = -2 + 5i$.

1. Placer les points A, B, C et D.
2. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$
3. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{CD}$

Exercice 4/23

Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes :

1. $(2 + 3i) + (-1 + 6i)$
2. $(5 + i) - (3 - 2i)$
3. $(1 + i)(3 - 2i)$
4. $(4 + i)(-5 + 3i)$
5. $(2 - i)^2$
6. $(x + iy)(x' + iy')$
7. $(x + iy)^2$
8. $(2 - 3i)(2 + 3i)$
9. $(a + ib)(a - ib)$

Exercice 5/23

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$
2. $z_2 = 4e^{\frac{2i\pi}{3}}$
3. $z_3 = e^{\frac{3i\pi}{2}}$
4. $z_4 = 2e^{-\frac{5i\pi}{6}}$

Exercice 6/23

Déterminer la forme trigonométrique puis exponentielle des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = -3\sqrt{3} - 3i$
2. $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$
3. $z_3 = -5 - 5i\sqrt{3}$
4. $z_4 = -i$
5. $z_5 = \sqrt{2}$
6. $z_6 = 1 + i$

Exercice 7/23

Simplifier les calculs suivants en les mettant sous la forme $re^{i\theta}$ où r et θ sont deux réels.

1. $z_1 = 3e^{i\dfrac{\pi}{2}} \times 2e^{i\dfrac{\pi}{4}}$
2. $z_1 = 4e^{i\dfrac{\pi}{3}} \times 5e^{i\dfrac{5\pi}{6}}$
3. $z_1 = 6e^{i\dfrac{3\pi}{4}} \times 4e^{i\dfrac{-\pi}{6}}$

Exercice 8/23

Simplifier les calculs suivants en les mettant sous la forme $re^{i\theta}$ où r et θ sont deux réels.

1. $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{\pi}{4}}$
2. $z_3 = \dfrac{25e^{i\frac{\pi}{4}}}{5e^{-i\frac{5\pi}{6}}}$
3. $z_4 = (4e^{i\frac{\pi}{3}})^2$

Exercice 9/23

On considère dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixe $z_A = 3 + i$, $z_B = 2 - 2i$, $z_C = 2i$ et $z_D = 1 + 5i$.

1. Faire une figure
2. Donner l'affixe de $\overline{A}$, point conjugué de A dans le plan complexe.
3. Calculer la distance AB après avoir déterminé l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
4. Calculer la distance CD après avoir déterminé l'affixe du vecteur $\overrightarrow{CD}$.
5. A l'aide des réponses aux questions précédentes, montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 10/23

Les points A, B et C ont pour affixe respective $-2 + i$, $3 + 3i$, $1 + \dfrac{11}{5}i$.

1. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire que les points A, B et C sont alignés.
3. Placer les points A, B et C.

Exercice 11/23

Les points A, B et C ont pour affixe respective $1 + \dfrac{1}{2}i$, $\dfrac{3}{2} + 2i$ et $-1 - \dfrac{11}{2}i$.
Montrer que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 12/23

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes :

- $\dfrac{1}{\sqrt{3} + 2i}$
- $\dfrac{1 + 4i}{1 - \sqrt{2}i}$
- $2 + i\sqrt{3}(5 - i) + \dfrac{1}{2} + 3i^2$
- i^3
- $\dfrac{1}{i}$
- i^4
- i^5
- i^6

Exercice 13/23

1. Donner la forme algébrique de : i^{12} ; i^{2012} ; i^{37} ; i^{-13}
2. Calculer la somme : $S = 1 + i + i^2 + \cdots + i^{2014}$
3. On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer $1 + j + j^2$.

Exercice 14/23

Écrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes suivants :

- $z_1 = 3$
- $z_2 = -4$
- $z_3 = 2i$
- $z_4 = -1 + i$
- $z_5 = -\sqrt{3} + i$
- $z_6 = -17$
- $z_7 = -6\sqrt{3} + 6i$
- $z_8 = 5i$
- $z_9 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$.

Exercice 15/23

1. Placer dans le plan complexe et écrire sous formes trigonométrique et algébrique les nombres complexes :

(a) $3e^{-i\frac{\pi}{2}}$
(b) $\sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}}$
(c) $6e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
(d) $5e^{i\frac{5\pi}{3}}$
(e) $2e^{i\frac{\pi}{4}}\,e^{-i\frac{3\pi}{2}}$
(f) $\dfrac{3e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$

2. Écrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes :

(a) 5
(b) $4+4i$
(c) $\dfrac{3}{2}i$
(d) $\dfrac{2}{1-i}$
(e) $\sqrt{3}-i$
(f) $(\sqrt{3}-i)^2$
(g) $(\sqrt{3}-i^3)$

Exercice 16/23

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(t)=5\cos(t-\dfrac{\pi}{4})$ et $g(t)=2\sin(t+\dfrac{\pi}{6})$.
Pour tout réel t, exprimer $f(t)$ sous la forme $a\cos(t)+b\sin(t)$ avec a et b à déterminer.
Pour tout réel t, exprimer $g(t)$ sous la forme $a\sin(t)+b\cos(t)$ avec a et b à déterminer.

Exercice 17/23

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t)=\cos(2t)-\sqrt{3}\sin(2t)$.
Pour tout réel t, exprimer $f(t)$ sous la forme $f(t)=A\cos(2t+\phi)$, puis $f(t)=A\sin(2t+\phi)$ avec A et ϕ à déterminer.

Exercice 18/23

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.

1. On considère le vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $-1-4i$ et le point A d'affixe $z_A=-1-5i$
   Déterminer l'affixe du point A' image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{w}$.
2. On considère le point A d'affixe $z_A=4-4i$. Déterminer l'affixe du point A' image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
3. On considère le point A d'affixe $z_A=-6i$. Déterminer l'affixe du point A' image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -2.

Exercice 19/23

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.

1. Quelle est l'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
2. On considère la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et le point A d'affixe $z_A=3-4i$.
   Déterminer l'affixe du point A' image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 20/23

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.

1. On considère l'homothétie de centre O et de rapport 2 et le point A d'affixe $z_A=-3i$.
   Déterminer l'affixe du point A' image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 2.
2. On considère l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{4}$ et le point B d'affixe $z_B=12-8i$.

Déterminer l'affixe du point B' image de B par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{4}$.

Exercice 21/23

Le plan complexe est muni dun repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 3e^{-i\dfrac{\pi}{3}}$ et $z_B = -1 + i\sqrt{3}$.
Les point O, A et B sont-ils alignés ?

Exercice 22/23

Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

1. $z = \dfrac{1+i}{1-i}$
2. $e = \dfrac{2(cos(\frac{\pi}{4}) + isin(\frac{\pi}{4}))}{\frac{1}{2}(cos(\frac{\pi}{3}) + isin(\frac{\pi}{3}))}$
3. $z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}$
4. $cos(\dfrac{\pi}{6}) - isin(\dfrac{\pi}{6})$
5. $z = 1 + e^{-\dfrac{i\pi}{6}}$
6. $z = (1+i\sqrt{3})^6$

Exercice 23/23

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.

1. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u}$ qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'. Donner l'écriture complexe de la transformation t, c'est à dire l'expression de z' en fonction de z.
2. Soit r la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M_1 d'affixe z_1 telle que $z_1 = -iz + 4i$.
   (a) Déterminer un point Ω tel que $r(\Omega) = \Omega$.
   (b) Démontrer que r est une rotation de centre Ω dont on précisera l'angle.