



## Exercices

# COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT

### Exercice 1/30

Dans une classe de 35 élèves, 15 suivent la spécialité A, 25 la spécialité B et 10 les deux spécialités.

1. Construire un diagramme de Venn représentant la situation.
2. Combien d'élèves de cette classe ne suivent aucune des deux spécialités ?

### Exercice 2/30 : Utiliser les principes additifs et multiplicatifs

1. Soit deux ensembles  $E = \{a, b\}$  et  $F = \{1, 2, 3, 4\}$ .  
Déterminer le nombre d'éléments de  $E \cup F$  puis de  $E \times F$ .
2. Un restaurant propose un menu « plat + dessert ».  
Un client qui décide de prendre ce menu doit choisir un plat parmi les trois viandes et les deux poissons proposés, puis un dessert parmi les quatre desserts proposés.  
Déterminer le nombre de choix différents permettant de construire son menu.

### Exercice 3/30

1. Combien peut-on former de codes de quatre chiffres non nuls et d'une lettre ?
2. Combien peut-on former de codes de trois chiffres non nuls distincts et de trois lettres distinctes ?

### Exercice 4/30

On considère le mot SUITE, on forme des « mots » (ayant un sens ou non), de une à cinq lettres, à partir des lettres du mot SUITE. Chaque lettre intervient au plus une fois dans un même « mot ».

1. Combien de « mots » de cinq lettres peut-on former ?
2. Combien de « mots » peut-on former ?
3. Déterminer le nombre de « mots » de cinq lettres dans lesquels il n'y a pas deux voyelles consécutives.

### Exercice 5/30

Le nombre d'atomes dans l'univers visible est estimé à  $10^{80}$ . Combien de cartes différentes devrait contenir un jeu pour que le nombre des permutations possibles dépasse le nombre

d'atomes visibles dans l'univers ?

### Exercice 6/30

- Les numéros de téléphone commençant par 06 sont constitués du couple  $(0, 6)$  que l'on complète par un 8-uplet de l'ensemble  $E = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ .
  - Déterminer le nombre de numéros de téléphone possibles commençant par 06.
  - Combien de numéros de téléphone commençant par 06 ou 07 sont possibles ?
- Pour sécuriser son compte sur un site internet, Emma doit créer un mot de passe composé de 7 lettres, uniquement avec les 26 de l'alphabet (pas de caractère spécial, pas de chiffre). Sa copine Fanny lui demande : « Combien de mots de passe différents peux-tu créer ? ». Quelle sera la réponse d'Emma ?

### Exercice 7/30

- Soit  $E = \{a, b, c, d, e\}$ .  
Combien y a-t-il de 3-uplets d'éléments distincts de  $E$  ?
- Dans le championnat de France de rugby, composé de 14 équipes et appelé TOP 14, les six premières équipes qui ont le plus de points à la fin des matches aller-retour (phase régulière) passent à la deuxième phase du championnat.
  - Combien de classements composés des six équipes qui atteignent la deuxième phase sont possibles ?
  - Lors de la saison 2018-2019, c'est le Stade Toulousain qui a fini premier de la phase régulière.  
Combien de classements composés des six premières équipes de cette phase régulière étaient alors possibles avec le Stade Toulousain en tête ?

### Exercice 8/30

- Soit  $E = \{0; 1; 2; \dots; 9\}$ .  
Combien de permutations de  $E$  peut-on réaliser ?
- On reprend l'énoncé de la question 2 de l'exercice 3.
  - Combien de classements des 14 équipes de la première phase de TOP 14 sont possibles ?
  - Lors de la saison 2018-2019, c'est le Stade Toulousain qui a fini premier de la phase régulière, suivi de Clermont-Ferrand.  
Combien de classements sont possibles avec ces deux équipes positionnées respectivement première et deuxième ?

### Exercice 9/30

Calculer SANS calculatrice, les combinaisons suivantes :

- |                        |                         |                            |
|------------------------|-------------------------|----------------------------|
| 1. $A = \binom{7}{3}$  | 3. $C = \binom{10}{5}$  | 5. $E = \binom{100}{99}$   |
| 2. $B = \binom{10}{4}$ | 4. $D = \binom{100}{0}$ | 6. $F = \binom{1000}{999}$ |

### Exercice 10/30

Le loto « ancienne version » consiste à cocher 6 numéros sur une grille comportant les entiers de 1 à 49. Lors du tirage, 6 numéros sont tirés au hasard, est déclaré vainqueur celui qui a coché ces 6 numéros.

1. Combien y a-t-il de grilles possibles ?
2. Combien de grilles ne comportent que 5 des 6 numéros tirés ?
3. Combien de grilles ne comportent que 3 des 6 numéros tirés ?

### Exercice 11/30

3 guides et 5 touristes partent à l'ascension d'une montagne. Ces 8 personnes forment une cordée dont la première et la dernière personne sont des guides.

De combien de façons différentes peut-être constituée la corde ?

### Exercice 12/30

1. Calculer  $\binom{7}{3}$  puis  $\binom{7}{4}$
2. On dispose d'un jeu de 32 cartes, toutes différentes. Une « main » de 4 cartes est un ensemble de 4 cartes dont l'ordre n'importe pas.
  - (a) Combien de « mains » de 4 cartes peut-on alors former ?
  - (b) On tire simultanément 4 cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir les 4 as ?
3. Dix amis, dont Hugo et Kylian, se partagent au hasard en deux équipes de 5 pour faire un match de football à 5.
  - (a) Combien d'équipes comportant Hugo et Kylian peut-on former ?
  - (b) Si les équipes sont composées au hasard, quelle est la probabilité qu'Hugo et Kylian soient ensemble ? En donner l'arrondi à 0,01.

### Exercice 13/30

1. Le groupe sanguin d'un être humain est déterminé par un gène situé sur le chromosome 9 qui contient un couple d'éléments de l'ensemble  $E = \{A, B, O\}$  ces éléments sont appelés allèles.
  - (a) Combien de couples d'allèles sont possibles ?
  - (b) On appelle hétérozygote un gène qui est représenté par deux allèles différents. L'ordre ne compte pas. Déterminer le nombre d'hétérozygotes pour le groupe sanguin.
  - (c) On appelle homozygote un gène qui contient les mêmes allèles. On appelle génotype l'ensemble des compositions alléliques d'un individu. Déterminer alors le nombre de génotypes sanguins.
2. Pour accéder à un compte sur un site internet, un utilisateur doit saisir un mot de passe contenant deux lettres et trois chiffres. Dans chacun des cas, déterminer le nombre de mots de passe :
  - (a) Lorsque le mot de passe commence par les deux lettres ;
  - (b) Lorsque le mot de passe commence par les deux lettres et que les caractères sont tous différents.

### Exercice 14/30 : Diagramme de Venn

Dans un camp de vacances hébergeant 80 personnes, 55 personnes pratiquent la natation, 33 le tennis et 16 ne pratiquent aucun de ces deux sports. Combien de personnes pratiquent à la fois le tennis et la natation ?

### Exercice 15/30 : Modèle de Carrol

Une maladie atteint 3% d'une population de 30 000 habitants. On soumet cette population à un test. Parmi les bien portants, 2% ont un test positif. Parmi les personnes malades, 49 ont un test négatif. On demande combien de bien portants ont un test négatif.

### Exercice 16/30 : Dénombrer

1. Combien peut-on former d'entiers de trois chiffres contenant au moins l'un des chiffres suivants 0, 2, 4, 6 ?
2. Aux jeux olympiques, huit compétiteurs s'affrontent pour trois médailles (or, argent, bronze). Combien y a-t-il de podiums possibles ?
3. Combien de tirages au loto comportent 4 numéros pairs et 2 numéros impairs ?
4. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot MARIE.

### Exercice 17/30 : Vrai/faux

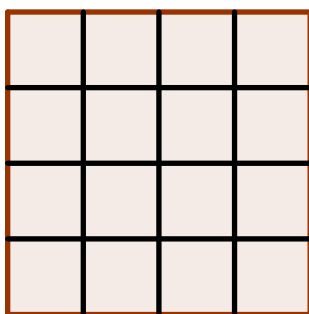
1. Le nombre de mots de 6 lettres pouvant être écrit avec les lettres  $\{O, I, E, V, L\}$  est  $6^5$ .
2.  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n! + (n+1)!}{n+2} \in \mathbb{N}$
3. Le nombre de 10-uplets d'éléments deux à deux distincts de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  se terminant par 1 est  $9!$ .
4. Le nombre de paires de lettres majuscules est 325.
5. Le nombre de combinaisons de 2 lettres majuscules avec répétitions est 351.
6. Le mot chien admet 126 anagrammes.
7.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [[0, n]]$

$$\binom{n-1}{k-1} + 2\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

8. Le nombre de paires dans un ensemble comptant  $n$  éléments est  $\sum_{k=1}^{n-1} k$
9.  $\frac{(2p)!}{p!} = 2$
10.  $\binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 2^7$

### Exercice 18/30

Combien peut-on tracer de carrés sur la figure ci-dessous en suivant les traits ?



### Exercice 19/30 : \*

Un savon pour le lave-vaisselle se vend sous la forme de poudre ou de liquide. Un sondage sur les consommateurs donne les résultats suivants :

- Un tiers des personnes interrogées n'utilisent pas de poudre.
- Deux septièmes des personnes interrogées n'utilisent pas de liquide.
- Un cinquième des personnes interrogées n'utilisent pas du tout le produit.

Combien de consommateurs ont été interrogés au cours de ce sondage ?

### Exercice 20/30

On dispose de trois teintes pour colorier un drapeau à trois bandes verticales.

1. Combien y a-t-il de drapeaux tricolores ?
2. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?
3. Deux bandes voisines ne pouvant être de la même couleur, combien y a-t-il de drapeaux possibles ?
4. Combien de drapeaux ont au moins deux bandes adjacentes de même couleur ?

### Exercice 21/30

Sur deux chromosomes différents, on considère deux gènes d'allèles respectifs A,a et B,b. On peut avoir quatre types de gamètes avec la probabilité : AB, Ab, aB, ab.

On s'intéresse à la transmission de ces deux caractères lors de la fécondation de deux parents. Montrer qu'il y a 9 cas possibles dont on déterminera la probabilité.

### Exercice 22/30

Nos ordinateurs nous demandent sans cesse des mots de passe.

1. Combien peut-on former de codes comportant 3 lettres distinctes parmi les 26 lettres majuscules de l'alphabet suivies de 2 chiffres distincts ?
2. Un octet est constitué de 8 bits. Un bit vaut 0 ou 1. Sachant qu'un caractère ASCII est codé sur un octet dans lequel 1 bit est toujours à 0 combien de caractères comporte ce code ?

**Exercice 23/30**

Combien de mots de 4 lettres peut-on écrire avec les 26 lettres de l'alphabet :

1. avec répétitions ?
2. sans répétitions ?

**Exercice 24/30**

Combien de mots de 4 lettres peut-on écrire avec les 26 lettres de l'alphabet :

1. Avec une seule lettre doublée ?
2. Avec deux lettres doublées ?

**Exercice 25/30**

Une association compte 60 membres. On choisit 5 personnes parmi les adhérents, pour former le bureau.

1. Combien de choix sont possibles ?
2. En fait, dans le bureau, il faut choisir un président, un trésorier et un secrétaire. Combien de choix sont possibles ?

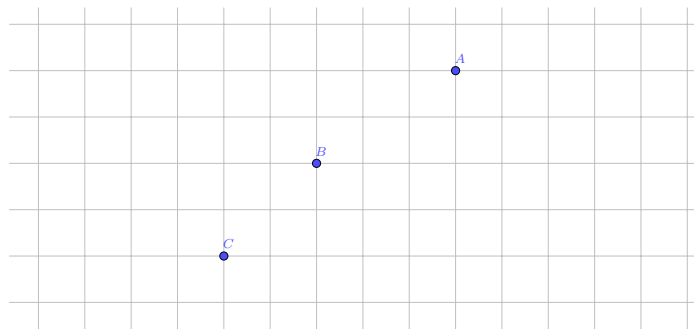
**Exercice 26/30**

A l'écrit d'un examen on doit traiter 8 exercices parmi 10.

1. Combien de choix sont possibles ?
2. Combien de choix sont possibles sachant que les deux premiers exercices sont obligatoires ?

**Exercice 27/30**

On étudie les chemins qui relient le point C au point A en suivant le quadrillage. Le chemin ne doit comporter que des pas vers le haut (H) et des pas vers la droite (D). Un tel chemin sera appelé chemin H-D.



1. Combien existe-t-il de chemins H-D reliant le point B au point A ? Les donner tous.
2. Combien existe-t-il de chemins H-D reliant le point C au point A ?
3. Combien de chemins H-D relient le point C au point A en passant par le point B ?
4. Quelle est la proportion parmi les chemins H-D reliant C à A de ceux qui passent par B ?

**Exercice 28/30**

On dispose de 4 urnes numérotées 1, 2, 3 et 4. On répartit 100 boules dans ces 4 urnes de la manière suivante. 40 boules dans l'urne 1. 30 boules dans l'urne 2. 20 boules dans l'urne 3 et 10 boules dans l'urne 4.

Montrer que le nombre de répartitions possibles est  $\frac{100!}{40!30!20!10!}$

**Exercice 29/30**

1. Au Loto, combien de tirages possibles (il faut choisir 6 numéros parmi les 49 de la grille) ?
2. Au Tiercé, combien d'arrivages possibles (17 chevaux partants, l'ordre compte) ?
3. Au Bridge, une main compte 13 cartes dans un jeu de 52.
  - (a) Combien de mains possibles ?
  - (b) Combien de mains comportent 4 trèfles, 3 carreaux, 3 cœurs et 3 piques ?
4. Au Poker, une main compte 5 cartes dans un jeu de 52.
  - (a) Combien de mains possibles ?
  - (b) Combien de carré possibles (4 cartes de même valeur) ?
  - (c) Combien de full possibles (3 cartes de même valeur + une paire) ?
  - (d) Combien de brelan possibles (3 cartes de même valeur) ?

**Exercice 30/30 : Vers la loi binomiale**

Une urne contient 3 jetons rouges et 7 jetons bleus. On tire successivement 3 jetons dans l'urne.

1. Sans remise, faire un arbre pondéré.
  - (a) Combien de tirages possibles ?
  - (b) Calculer la probabilité  $p_1$  que deux jetons soient rouges.
2. Avec remise. Faire un arbre pondéré.
  - (a) Combien de tirages possibles ?
  - (b) Calculer la probabilité  $p_2$  que deux jetons soient rouges.
3. On généralise avec remise : loi binomiale. 5 tirages avec remise.
  - (a) Calculer la probabilité du tirage BBRBR.
  - (b) Déterminer le nombre de tirages contenant exactement deux boules rouges. Puis déterminer la probabilité de l'événement  $A = \ll \text{le nombre de boules rouges tirées est exactement 2} \gg$ .
  - (c) On appelle  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées. Donner la loi de  $X$ .