Exercices

Arithmétique 1

Exercice 1/32

1. Donner la liste des diviseurs positifs de 36 et de 126.
2. Donner la liste des diviseurs dans $\mathbb{Z}$ de 36 et de 126.

Exercice 2/32

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse.

1. Le produit de deux entiers naturels consécutifs est toujours divisible par 2.
2. Le produit de trois entiers naturels consécutifs est toujours divisible par 3.

Exercice 3/32

Démontrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $2^{2n} + 2$ est divisible par 3.

Exercice 4/32

1. Démontrer que pour tout entier relatif n et m, $12m^2 - 30n$ est divisible par 6.
2. Déterminer les entiers naturels n tel que 4 divise $n + 13$.

Exercice 5/32

Déterminer la liste des diviseurs de 7 et en déduire les entiers relatifs n tel que $4n + 1$ divise 7.

Exercice 6/32

1. Déterminer les entiers relatifs n tels que $(n - 4)$ divise $(3n - 17)$.
2. Déterminer les entiers relatif n tels que la fraction $\dfrac{6n + 12}{2n + 1}$ soit un entier relatif.
3. Montrer que si n est un entier impair alors $(n^2 - 1)$ est divisible par 8.
4. Soit k un entier relatif. On pose : $a = 4k + 3$ et $b = 5k - 7$.
   Quels sont les valeurs possibles d'un diviseur commun à a et b ?

Exercice 7/32

1. On considère l'égalité suivante : $23 \times 51 + 35 = 1208$
   Sans effectuer de division, répondre en vous justifiant, aux questions suivantes :

(a) Quels sont le quotient et le reste dans la division euclidienne de (-1 208) par 51 ?

(b) Quels sont le quotient et le reste dans la division euclidienne de 1 208 par 23 ?

2. On divise un entier naturel n par 152 puis par 147. Les quotients sont égaux et les restes respectifs sont 13 et 98. Quel est cet entier naturel n ?

Exercice 8/32

1. Soit a et n deux entiers relatifs. Démontrer que si a divise $2n+5$ et a divise $3n-1$ alors a divise 17.
2. Soit a et b deux entiers relatifs tel que $a = 6n+5$ et $b = 7n+6$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Déterminer l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
3. Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $(2n+5)|(n-4)$.

Exercice 9/32

Un entier $b > 1$ étant choisi, tout entier N peut s'écrire de manière unique : $N = a_p b^p + a_{p-1}b^{p-1} + ... + a_1 b + a_0$ avec $0 \leq a_k < b$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On le note alors : $N = \overline{a_p a_{p-1} ... a_1 a_0}$. C'est l'écriture de N en base b.

1. Donner l'écriture en base 2 des nombres $N = 7$, $N = 18$ et $N = 35$ en base 10.
2. Donner l'écriture décimale du nombre $N = \overline{10010101011}$ en base 2.
3. Établir les tables d'addition et de multiplication en base 2.

Exercice 10/32

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne

1. de 524 par 17
2. de -524 par 17

Exercice 11/32

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $5n+11$ par $2n+3$, avec n entier naturel.

Exercice 12/32

1. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 114 par 8, puis de -114 par 8.
2. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le quotient et le reste de la division euclidienne de $7n+5$ par $3n+1$.

Exercice 13/32

1. (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(n+2)^2 = n(n+4)+4$.
   (b) A quelle condition 4 est-il le reste de la division euclidienne de $(n+2)^2$ par n ?
2. Le reste de la division euclidienne de a par 7 est 4 et le reste de la division euclidienne de b par 7 est 6.
   (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de $a+b$ par 7.
   (b) Déterminer le reste de la division euclidienne de $a-b$ par 7.

Exercice 14/32

Démontrer que pour tout entier naturel n , $n(n+5)(n-5)$ est divisible par 3.

Exercice 15/32

1. Déterminer les entiers relatifs entre -2300 et -2000 dont la division euclidienne par 128 donne un quotient égal à l'opposé du reste.
2. Dans la division euclidienne de -42 par l'entier naturel non nul b, le reste est 15. Quelles sont les valeurs possibles du diviseur et du quotient ?

Exercice 16/32

Compléter les congruences suivantes.

1. $12 \equiv ....\ [5]$
2. $10 \equiv ....\ [11]$
3. $-2 \equiv ....\ [8]$
4. $77 \equiv ....\ [4]$
5. $-18 \equiv ....\ [7]$
6. $-14 \equiv ....\ [3]$
7. $85 \equiv ....\ [7]$
8. $66 \equiv ....\ [9]$
9. $100 \equiv ....\ [11]$
10. $-24 \equiv ....\ [5]$

Exercice 17/32

Soit a et b deux entiers relatifs.

1. On suppose que $a \equiv 16\ [5]$.
   Quel est le reste de la division euclidienne de a par 5 ?
2. On suppose que $b \equiv 17\ [3]$.
   Quel est le reste de la division euclidienne de b par 3 ?

Exercice 18/32

Soit a et b deux entiers relatifs tels que $a \equiv 2\ [5]$ et $b \equiv 3\ [5]$.
Donner le reste de la division euclidienne par 5 de $a+b,\ a-b,\ ab,\ a^2$.

Exercice 19/32

1. Compléter le tableau de congruence modulo 3 suivant où n désigne un entier relatif.

$n \equiv ....[3]$	0	1	2
$n^2 \equiv ....[3]$			
$2n \equiv ....[3]$			
$n^2+2n \equiv ....[3]$			

2. En déduire les valeurs de n pour lesquelles n^2+2n est divisible par 3.

Exercice 20/32

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes.

1. $x + 5 \equiv 3$ [8]
2. $x + 6 \equiv 5$ [3]
3. $5x \equiv 1$ [3]
4. $3x \equiv 7$ [8]
5. $10x + 2 \equiv 3$ [5]

Exercice 21/32

Résoudre les équations suivantes :

1. $5x \equiv 4$ [7]
2. $2x + 1 \equiv 2$ [5]

Exercice 22/32

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2021^{2022} par 5.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2022^{2021} par 5.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de 100^{1000} par 13.

Exercice 23/32

1. Soit n un entier naturel.
   Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^n par 3 selon la valeur de n.
2. (a) Soit n un entier naturel.
   Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^n par 6 selon la valeur de n.
   (b) En déduire le reste de la division euclidienne de $15\,625^{221}$ par 6.

Exercice 24/32

1. Quel est le chiffre des unités de 9^{231} ?
2. Quel est le chiffre des unités de 4^{125} ?

Exercice 25/32

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $6^{3n} - 7^n$ est divisible par 11.

Exercice 26/32 : Vrai/Faux

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en vous justifiant :

1. Le reste de la division euclidienne de 2018^{2020} par 7 est 2.
2. 11^{2012} est congru à 4 modulo 9.
3. $x^2 + x + 3 \equiv 0$ [5] si, et seulement si, $x \equiv 1$ [5].

Exercice 27/32

1. Démontrer que 3 est inversible modulo 5.
2. Démontrer que 4 n'est pas inversible modulo 6.

Exercice 28/32

Le diviseur d'une division euclidienne est 45, le reste est le carré du quotient.
Calculer le dividende entier naturel.

Exercice 29/32

n étant un entier naturel quelconque, montrer les relations de divisibilité suivantes :

1. $7|3^{2n+1}+2^{n+2}$
2. $11|5^{10^{5^{10^{5^{10}}}}}+10^{5^{10^{5^{10^{5}}}}}$

Exercice 30/32

1. Montrer qu'un nombre entier est divisible par 3 si, et seulement si, la somme des chiffres qui le composent est divisible par 3.
2. Montrer qu'un nombre entier est divisible par 4 si, et seulement si, le nombre formé par ses deux derniers chiffres est un multiple de 4.
3. Montrer qu'un nombre entier est divisible par 5 si, et seulement si, son dernier chiffre est 0 ou 5.
4. Montrer qu'un nombre entier est divisible par 9 si, et seulement si, la somme des chiffres qui le composent est divisible par 9.
5. Montrer qu'un nombre entier est divisible par 10 si, et seulement si, son dernier chiffre est 0.

Exercice 31/32

Démontrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9.

Exercice 32/32

Tous les ouvrages publiés sont identifiés par un numéro ISBN (International Standard Book Number) qui indique la langue de publication, l'éditeur et la référence de l'ouvrage chez cet éditeur.
Un numéro ISBN est constitué de neuf chiffres (c'est-à-dire neuf entiers compris entre 0 et 9) suivis d'un espace et d'une clé. Cette clé est un chiffre ou la lettre X (le dix en numération romaine).
Pour déterminer la clé d'un numéro ISBN dont les neuf premiers chiffres sont abcdefghi, on calcule le nombre $N = a + 2b + 3c + 4d + 5e + 6f + 7g + 8h + 9i$, puis on détermine le nombre r compris entre 0 et 10 qui est congru à N modulo 11. Si le nombre r est strictement inférieur à 10, la clé est égale à r ; si le nombre r est égal à 10, la clé est X.

1. Vérifier que la clé du numéro ISBN 190190340 0 est correcte.
2. Calculer la clé du numéro ISBN dont les 9 premiers chiffres sont : 103241052.
3. Le quatrième chiffre du numéro ISBN d'un ouvrage est illisible. On le note d. La clé de ce numéro est 4 et le numéro se présente ainsi : 329d12560 4.
   (a) Montrer que $4d \equiv 2$ [11].

   (b) En déduire le chiffre d.

4. Le premier chiffre et le neuvième chiffre du numéro ISBN d'un autre ouvrage sont illisibles. On les note a et i. La clé de ce numéro est 9 et le numéro se présente ainsi : a3210050i 9.
   (a) Montrer que $a \equiv 2 - 9i$ [11].
   (b) Donner deux valeurs possibles du couple $(a; i)$.