Exercices

Orthogonalité

Exercice 1/15

Soit un cube ABCDEFGH de côté a.
calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$
2. $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{CA}$
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FG}$
4. $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BH}$

Exercice 2/15 : Repère orthonormé

Soit un cube ABCDEFGH de côté a.
I et J sont les milieux respectifs de $[EF]$ et $[GC]$.
calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{HC}$
2. $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{GJ}$
3. $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{JA}$
4. $\overrightarrow{JH} \cdot \overrightarrow{JD}$

Exercice 3/15

On considère de nouveau le cube de côté a.
Déterminer une mesure de l'angle θ entre les droites (DF) et (HB) en degré à 10^{-1} près.

Exercice 4/15

Considérons un plan $\mathcal{P}$, et un repère orthonormé de l'espace. Soit A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$, de coordonnées respectives $(1;-1;-3)$, $(-1;1;1)$ et $(2;-3;1)$.
Le vecteur $\overrightarrow{u}(-\frac{8}{3};-2;\frac{2}{3})$ est-il normal au plan $\mathcal{P}$?

Exercice 5/15

Soit ABCDEFGH une cube de côté a.
Montrer que $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (BDE).

Exercice 6/15

Soit le cube ABCDEFGH. Montrer que (AB) et (CF) sont orthogonales.

Exercice 7/15

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(2; -1; -5)$ et $B(3; 1; -4)$ et la droite $\mathcal{D}$ passant par $C(4; 6; 9)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 1; -3)$.
Montrer que les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont orthogonales.

Exercice 8/15

On considère un cube ABCDEFGH. Démontrer que la droite (DG) est perpendiculaire au plan (BEH).

Exercice 9/15

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.
Démontrer que (FD) est orthogonale au plan (ACH).

Exercice 10/15

On considère le point $A(2; 1; -1)$ et la droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}(-2; 1; 1)$ passant par le point $M(3; -5; 2)$.
Déterminer la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 11/15

Soit le plan $\mathcal{P}$ passant par $M(1, 1, 2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1, -2, 0)$.
Calculer la distance entre $\mathcal{P}$ et le point $A(5, 0, 1)$.

Exercice 12/15

Soit ABCDEFGH un cube.

1. Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BD).
2. Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BF}$
3. En déduire que la droite (AC) est orthogonale au plan (HDB).

Exercice 13/15

ABCDEFGH est un cube de côté α.
I est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).

1. Calculer $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AF}$
2. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont orthogonaux.
3. Pour la suite, on admettra de même que les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont orthogonaux.
   Montrer alors que I est le projeté orthogonal de E sur (AFH).
4. Montrer que les droites (AI) et (HF) sont orthogonales et que les droites (HI) et (AF) sont orthogonales.
5. En déduire la position du point I dans le triangle AFH.

Exercice 14/15

1. Développer et réduire $||\vec{u} + \vec{v}||$.
2. En déduire les formules de polarisation du cours.
3. On considère une pyramide SABCD à base carrée de sommet S, de hauteur $SA = 6,5$ cm et telle que $AB = 3,5$ cm.
   (a) Justifiez que (BC) et (SB) sont perpendiculaires.
   (b) Calculer la valeur exacte de SB et SC.
   (c) Calculer $\overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{SC}$.
   (d) En déduire l'angle $\widehat{BSC}$ à 10^{-1} près.

Exercice 15/15

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $\mathcal{P}$ le plan défini par le point $M(-1;1;0)$ et par le vecteur normal $\vec{n}(2;3;5)$.
Soit $A(1;-4;5)$.
On veut déterminer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$, c'est à dire la distance AH, où H est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$ en fonction de la distance AH.
2. Calculer d'une autre façon $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|$.
3. En déduire la distance de A au plan $\mathcal{P}$.