Exercices

Lois discrètes

Exercice 1/40

Une variable aléatoire admet la loi de probabilité suivante dont il manque une case :

x_i	1	2	3
p_i	0.3	0.3	

X peut-elle suivre une loi uniforme discrète ? Justifier votre réponse.

Exercice 2/40

Une urne contient 3 boules rouges, 8 boules jaunes et 9 boules bleues. On tire au hasard une boule dans l'urne et on gagne 2 points pour une boule rouge, 1 point pour une boule jaune et 0 point pour une bleue.
On appelle X la variable aléatoire qui représente le nombre de points gagnés.
Déterminer la loi de probabilité de X.

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$			

Exercice 3/40

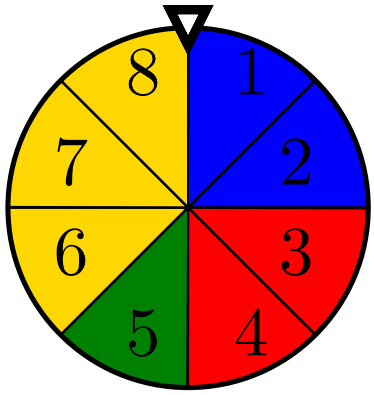
La variable aléatoire X représente les différents tarifs des menus proposés dans un restaurant.
La loi de probabilité de X est :

$X = x_i$	9	12	17	25
$P(X = x_i)$	0.15	0.42	0.23	0.2

1. Calculer $P(X \leq 17)$. Interpréter.
2. Calculer le prix moyen d'un menu.

Exercice 4/40

Dans une fête foraine, on fait tourner la roue ci-contre et on note le secteur indiqué par la flèche quand la roue s'arrête. Chaque secteur à la même probabilité d'apparaître.

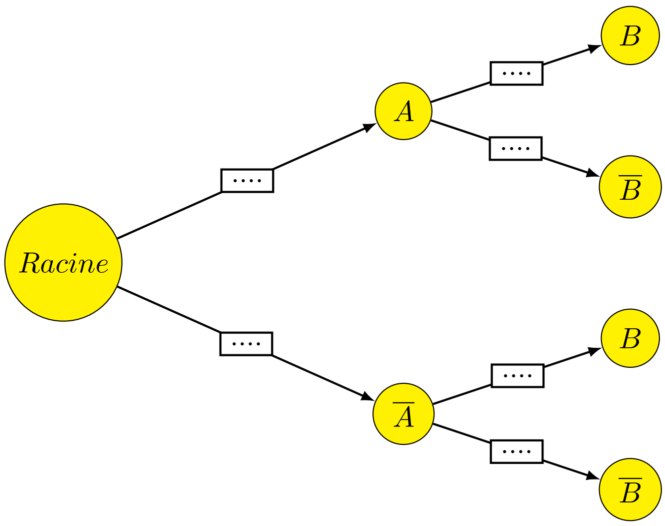


1. On gagne le nombre de tours de manège égal au numéro du secteur. Soit X la variable qui donne le nombre de tours gagnés. Donner la loi de probabilité de X et son espérance.
2. Le gain prévu est de O euros pour chacun des secteurs 1 à 4, pour les secteurs 5 et 6 de 1 euros, pour les secteurs 7 et 8, de 2 euros. On note G la variable aléatoire qui donne le gain du joueur en euros. Donner la loi de probabilité de G et le gain moyen que l'on peut espérer à ce jeu.

Exercice 5/40

On considère deux événements A et B tels que :
$P(A) = 0.25$ $\quad$ $P_A(B) = 0.45$ $\quad$ $P_{\overline{A}}(B) = 0.34$

1. Compléter l'arbre de probabilité correspondant.

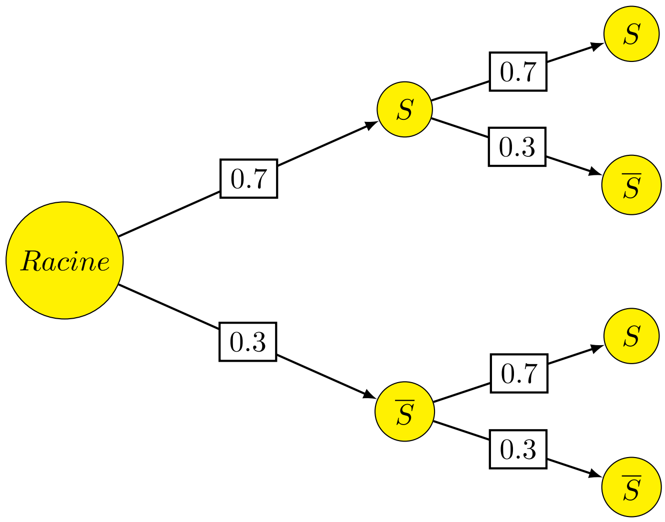


2. Calculer $P(A \cap B)$.
3. Déterminer $P(B)$.

Exercice 6/40

L'arbre ci-contre représente un schéma de n épreuves de Bernouilli de succès S et de paramètre p. Entoure la bonne réponse.

1. $n = 4$ et $p = 0.3$.
2. $n = 4$ et $p = 0.7$.
3. $n = 2$ et $p = 0.3$.
4. $n = 2$ et $p = 0.7$.



Exercice 7/40

On lance une pièce équilibré. Déterminer la loi des variables aléatoires suivantes (aucun calcul de probabilités n'est demandé).

1. X donne la face obtenue après un lancer.
2. Y donne le nombre de « face » obtenus après 20 lancers.

Exercice 8/40

Dans cet exercice il faudra détailler les calculs et les propriétés utilisées.

1. Déterminer les coefficients binomiaux suivants : $\binom{8}{0}$; $\binom{8}{1}$; $\binom{8}{8}$; $\binom{8}{7}$
2. On donne $\binom{8}{2} = 28$. En déduire : $\binom{8}{6}$ et $\binom{9}{2}$

Exercice 9/40

Dans cet exercice il faudra détailler les calculs et les propriétés utilisées.
On lance 3 fois de suite de façon indépendante une pièce de monnaie et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de « face » obtenu.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 fois « face ».
3. Calculer la probabilité de n'obtenir aucune fois « face ».
4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois « face ».
5. En moyenne, combien de fois le joueur obtiendra-t-il « face » avec 3 répétitions ?

Exercice 10/40

Sur le trajet d'un automobiliste se trouvent 10 feux tricolores numérotés de 1 à 10. On suppose que la probabilité qu'un feu soit rouge ou orange lorsqu'il se présente est égale à 0,6 et que les feux sont indépendants les uns des autres. On note X le nombre de feu rouge et orange rencontré par l'automobiliste.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité que deux feux rencontrés soient rouge ou orange.
3. Quelle est la probabilité de ne rencontrer aucun feu rouge ou orange.

Exercice 11/40

On lance deux dés cubiques équilibrés. La variable aléatoire X donne la somme des points obtenus sur la face de chaque dé. La variable aléatoire Y donne 1 si cette somme est supérieure ou égale à 8 et 0 sinon.

1. X suit-elle une loi uniforme ?
2. Y suit-elle une loi associée à une épreuve de Bernouilli ?

Exercice 12/40

Une urne contient 6 boules : 2 bleues, 2 vertes et 2 jaunes.

1. Peut-on associer une épreuve de Bernouilli à l'expérience aléatoire suivante : on tire une boule au hasard et on note sa couleur ?
2. On tire au hasard une boule. La variable aléatoire X indique le nombre de boules bleues obtenues. Donner la loi de X et son espérance.

Exercice 13/40

Un élève prend le bus pour aller au lycée.
Chaque matin, il a deux chances sur trois d'attendre moins de 5min.
On appelle S l'événement : « l'élève attend son bus moins de 5 minutes ».

1. Dessine l'arbre qui représente la situation.
2. L'élève doit prendre le bus trois matins consécutifs. Dessiner l'arbre pondéré qui représente la situation.
3. Calculer la probabilité qu'il attende son bus moins de 5 minutes une seule fois sur les trois jours.

Exercice 14/40

Sans calculatrice, entourer les affirmations vraies et corriger les autres.

1. $\binom{15}{1} = 14$
2. $\binom{9}{8} = \binom{9}{1}$
3. $\binom{16}{5} - \binom{15}{5} = \binom{15}{4}$

Exercice 15/40

Dans cet exercice il faudra détailler les calculs et les propriétés utilisées.
Une urne contient des jetons noirs et des jetons blancs. Le nombre de jetons noirs est le triple du nombre de jetons blancs.

1. On tire au hasard un jeton. Quelle est la probabilité que ce jeton soit noir ?
2. On tire à présent 4 jetons successivement avec remise et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de jetons noirs obtenu.
   (a) X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, en donner les paramètres.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 ou 3 jetons noirs ?
   (c) Quelle est l'espérance de X ? Que représente ce nombre ?

Exercice 16/40

Une urne opaque contient 20 boules indiscernables au toucher, huit sont blanches et 12 sont rouges. Martine effectue des tirages avec remise jusqu'à ce qu'elle tire une boule blanche. On note Y le nombre de tirages effectués par Léa.

1. Quelle est la loi de Y ?
2. Donner **les valeurs exactes sous forme de fractions** de $P(Y = 6)$ et $P(X > 5)$.
3. En déduire $P_{(Y>5)}(Y = 6)$ et expliquer ce que représente cette probabilité.
4. Vérifier que $P_{(Y>5)}(Y = 6) = P(Y = 1)$. Interpréter ce résultat d'après vos connaissance.

Exercice 17/40

Soit X une variable aléatoire. Associer à chaque représentation la loi correspondante avec ses paramètres (représentation au tableau).

Exercice 18/40

Dans une fabrication d'objets en série, 8% de ces objets présentent un défaut. Un carton contient 10 objets. La présence d'un défaut pour un objet est indépendante de l'objet choisi.

1. Calculer la probabilité que, dans le carton, les dix objets soient sans défaut.
2. Calculer la probabilité que, dans le carton, au moins 8 objets soient sans défaut.

Exercice 19/40

On estime que 2% des êtres humains sont gauchers, calculer la probabilité que parmi 100 personnes, 5 soient gauchères.

Exercice 20/40

Un escargot descend le long d'un grillage. A chaque épissure, il prend la maille de droite une fois sur trois, celle de gauche deux fois sur trois. Il descend ainsi dix niveaux.

1. Quelle est la probabilité que l'escargot ait pris quatre fois la maille de droite ?
2. Quelle est la probabilité que l'escargot ait pris quatre fois la maille de gauche ?

Exercice 21/40

Dans cet exercice, on donnera les résultat à 10^{-3} près.

Un jeux consiste à lancer 5 fois un dé à six faces. On gagne si l'on obtient 5 ou 6.

1. Calculer la probabilité de gagner 4 fois.
2. Calculer la probabilité de gagner au moins une fois.
3. Calculer l'espérance et l'écart type. Interpréter dans le contexte de l'exercice.

Exercice 22/40

Les parties A et B sont indépendantes. Les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Pour aider à la détection de certaines allergies, on peut procéder à un test sanguin dont le

résultat est soit positif, soit négatif.
Dans une population, ce test donne les résultats suivants :

- Si un individu est allergique, le test est positif dans 97% des cas ;
- Si un individu n'est pas allergique, le test est négatif dans $95,7\%$ des cas.

Par ailleurs, 20% des individus de la population concernée présentent un test positif.

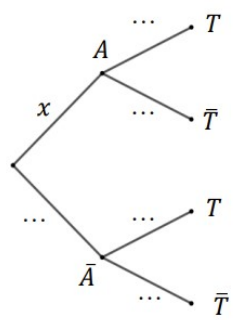
On choisit au hasard un individu dans la population, et on note :

- A l'événement « l'individu est allergique » ;
- B l'événement « l'individu présente un test positif ».

On notera $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les événements contraires de A et B.
On appelle par ailleurs x la probabilité de l'événement A : $x = P(A)$.

Partie A

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre décrivant la situation, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.



2. (a) Démontrer l'égalité : $P(T) = 0,927x + 0,043$
   (b) En déduire la probabilité que l'individu choisi soit allergique.
3. Justifier par un calcul l'affirmation suivante : « Si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80% de chances que cet individu soit allergique ».

Partie B

On réalise une enquête sur les allergies dans une ville en interrogeant 150 habitants choisis au hasard, et on admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.
On sait que la probabilité qu'un habitant choisi au hasard dans cette ville soit allergique est égale à 0,08.
On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 150 habitants choisis au hasard associe le nombre de personnes allergiques dans cet échantillon.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que 20 personnes exactement parmi les 150 interrogées soient allergiques.
3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la probabilité qu'au moins 10% des personnes parmi les 150 interrogées soient allergiques.

Exercice 23/40

Dans une population donnée, 56% des familles occupent une maison individuelle. Parmi elles, 78% en sont propriétaires.
Parmi les familles n'occupant pas une maison individuelle, 24% sont propriétaire de leur logement.

1. On choisit une famille au hasard dans la population considérée.

Démontrer que la probabilité pour qu'elle soit propriétaire de son logement est égale à 0,5424.

2. On interroge cinq familles au hasard dans la population considérée. On suppose que les choix successifs sont indépendants.
   Soit X la variable aléatoire, qui à tout prélèvement, associe le nombre de famille propriétaires du logement.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   (b) Donner l'expression de $P(X = k)$ en fonction de k.
   (c) Calculer $P(X = k)$ pour $0 \leq k \leq 5$, arrondir les résultats à 10^{-4}.
   (d) Calculer $E(X)$ et $V(X)$ par deux méthodes.

Exercice 24/40

Une urne contient une boule rouge, deux boules blanches et trois boules noires. On extrait successivement six boules de cette urne, en remettant après chaque tirage la boule extraite dans l'urne. On suppose tous les tirages équiprobables.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 boules blanches ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 3 boules blanches ?
3. Combien peut-on espérer obtenir de boules blanches en moyenne ?

Exercice 25/40

On lance deux dés bien équilibrés. On gagne si la somme des points obtenus est égale à 7.

1. Démontrer, à l'aide d'un tableau à double entrée, que la probabilité de gagner est $\dfrac{1}{6}$.
2. On répète 5 fois de suite cette expérience et on suppose que les jets sont indépendants.
   (a) Justifier que le nombre de succès suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) Calculer la probabilité de gagner exactement deux fois.
   (c) Calculer la probabilité de gagner au plus deux fois.
   (d) Calculer la probabilité de gagner au moins trois fois.

Exercice 26/40

On considère une urne contenant 5 boules rouges et 7 boules noires.

1. On tire simultanément 2 boules de l'urne, on admet que tous les tirages sont équiprobables.
   Calculer la probabilité des événements suivants :
   (a) on a tiré 2 boules rouges ;
   (b) on a tiré 2 boules de même couleur.
2. On répète 6 fois l'épreuve qui consiste à tirer simultanément 2 boules de l'urne, en remettant les boules dans l'urne après tirage (les épreuves successives sont donc indépendantes).
   On considère comme un succès le tirage de 2 boules rouges à une épreuve.
   Soit X la variable aléatoire, qui à tout prélèvement, associe le nombre de succès obtenus au cours des 6 épreuves.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   (b) Déterminer l'espérance mathématique et la variance de X.
   (c) Calculer la probabilité d'obtenir exactement 4 succès.

Exercice 27/40

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
Une urne contient trois boules noires et une boule blanche. On considère l'expérience suivante : On lance un jeton parfaitement équilibré, présentant une face noire et une face blanche. Si le jeton tombe sur la face blanche, on ajoute une boule blanche dans l'urne ; si le jeton tombe sur la face noire, on ajoute une boule noire dans l'urne.
Puis on tire simultanément et au hasard, trois boules de l'urne.

1. On appelle E_0 l'événement : « Aucune boule blanche ne figure parmi les trois boules tirées ». et B l'événement :« Le jeton est tombé sur la face blanche ».
   (a) Calculer $P(E_0 \cap B)$, $P(E_0 \cap \overline{B})$ puis $P(E_0)$.
   (b) On tire trois boules de l'urne, aucune boule blanche ne figure dans ce tirage. Quelle est la probabilité que le jeton soit tombé sur la face noire ?
2. On appelle E_1 l'événement : « Une boule blanche et une seule figure parmi les trois boules tirées » et B l'événement :« Le jeton est tombé sur la face blanche ».
   (a) Calculer la probabilité de l'événement E_1.
   (b) On effectue successivement quatre fois l'expérience décrite au début, qui consiste à lancer le jeton, puis à tirer les trois boules de l'urne.
   Quelle est la probabilité d'obtenir, au moins une fois, une et une seule boule blanche ?

Exercice 28/40

Une boîte de chocolats contient 10 chocolats au lait et 5 chocolats noirs. 15 convives prennent au hasard un chocolat et font passer la boîte.

1. Calculer la probabilité de l'événement A : « le 10-ième convive prend le dernier chocolat noir ».
2. Quelle est la probabilité de l'événement D : « les chocolats noirs ont été terminés avant les chocolats au lait » ?

Exercice 29/40

Dans une maternité, on observe n naissances, n entier strictement positif.
On admet que dans cette maternité la probabilité qu'un nouveau né soit une fille est de 0,49. Les naissances sont supposées indépendantes.

1. Combien de naissances faut-il attendre pour que la probabilité qu'il naisse au moins une fille soit supérieure à 0,95 ?
2. Combien de naissances faut-il attendre pour que la probabilité qu'il naisse au moins deux filles soit supérieure à 0,95 ?

Exercice 30/40

Dans une urne, on dispose de 3 boules bleues et 5 boules rouges. On organise alors un jeu dont les règles sont les suivantes : on tire au hasard une boule de l'urne.

- Si la boule est bleue, la boule est remise dans l'urne, le joueur gagne 1 point et rejoue :
  - si la boule tirée est bleue, le joueur gagne 2 points
  - sinon il gagne 1 point.
- Si la boule est rouge, on la remet dans l'urne, le joueur ne gagne ni ne perd aucun point et rejoue :
  - si la boule tirée est bleue, le joueur gagne 1 point

– sinon il gagne 2 points.

Quel est le gain moyen à ce jeu ?

Exercice 31/40

On lance cinq fois un dé non pipé, quelle est la probabilité que le chiffre 6 apparaisse exactement trois fois ?

Exercice 32/40

Dans le cadre d'un entraînement d'un club de football, Alexis s'exerce aux tirs au but. Combien doit-il effectuer de tentatives pour que la probabilité de marquer au moins un but soit au moins égale à 0,9, sachant qu'à chaque tir il marque 3 fois sur 5 ?

Exercice 33/40

Un élève prend le bus pour aller au lycée.
Chaque matin, il a deux chances sur trois d'attendre moins de 5min.
On appelle S l'événement : « l'élève attend son bus moins de 5 minutes ».

1. Dessine l'arbre qui représente la situation.
2. L'élève doit prendre le bus trois matins consécutifs. Dessiner l'arbre pondéré qui représente la situation.
3. Calculer la probabilité qu'il attende son bus moins de 5 minutes une seule fois sur les trois jours.

Exercice 34/40

Sans calculatrice, entourer les affirmations vraies et corriger les autres.

1. $\binom{15}{1} = 14$
2. $\binom{9}{8} = \binom{9}{1}$
3. $\binom{16}{5} - \binom{15}{5} = \binom{15}{4}$

Exercice 35/40

1. Déterminer les coefficients binomiaux suivants : $\binom{8}{0}$; $\binom{8}{1}$; $\binom{8}{8}$; $\binom{8}{7}$
2. On donne $\binom{8}{2} = 28$. En déduire : $\binom{8}{6}$ et $\binom{9}{2}$

Exercice 36/40

Un avion possède deux moteurs identiques : la probabilité que chacun d'eux tombe en panne est de 0,001. On suppose que la panne d'un moteur n'a aucune influence sur la panne de l'autre moteur.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que les deux moteurs tombent en panne.
3. Calculer la probabilité qu'un seul moteur tombe en panne.

Exercice 37/40

Un tournoi de tennis se déroule par élimination directe. On peut jouer au maximum trois parties (si l'on va en finale). A chaque rencontre, Noé a une probabilité de gagner égale à 0,4.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées par Noé.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X.
2. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

Exercice 38/40

Un constructeur de composants produit des résistances. On admet que la probabilité qu'une résistance soit défectueuse est 0,005. Dans un lot de 1000 résistances, quelle est la probabilité d'avoir :

1. Au moins une résistance défectueuse ?
2. Exactement deux résistances défectueuses ?
3. Au plus deux résistances défectueuses ?
4. Au moins deux résistances défectueuses ?

Exercice 39/40 : Problème du chevalier de Méré

Les dés étant supposés non pipés, on considère les événements suivants :

- A : « Obtenir au moins un 6 en lançant quatre fois le dé ».
- B : « Obtenir au moins un double 6 en lançant vingt-quatre fois deux dés ».

Les dés utilisés sont cubiques, les faces étant numérotées de 1 à 6, non pipés. Pensez-vous, comme le chevalier de Méré (noble de la cour de Louis XIV), que les événements A et B sont équiprobable ?
Cet exercice a été présenté à Blaise Pascal. Selon une lettre de Pascal à Fermat (datant du 29/07/1654), il “ avait très bon esprit, mais n'était pas géomètre ”.

Exercice 40/40 : Vrai ou faux

1. Indépendance et incompatibilité sont deux notions équivalentes.
2. Considérons un jeu de 32 cartes et les épreuves ε_1 « je prends une carte du paquet et la garde », et ε_2 « je prends une carte du paquet ». Ces deux épreuves successives ne sont pas indépendantes.
3. Si X suit une loi binomiale $B(n;p)$, alors la variable aléatoire $\dfrac{X}{n}$ suit aussi une loi binomiale.
4. Il n'existe qu'une seule variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(n;p)$.
5. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$
6. Deux épreuves aléatoires identiques sont nécessairement indépendantes.
7. Si deux événements non impossibles A et B ne sont pas indépendants, on ne peut pas calculer $P(A \cap B)$.
8. $(0,1) \in \{1;2\} \times \{0;1;2\}$.
9. Si on lance deux fois une pièce de monnaie, alors $P(\{Pile\} \times \{Face\}) = \dfrac{1}{4}$
10. Si A_1 et A_2 sont deux événements appartenant respectivement aux épreuves ε_1 et ε_2, alors $A_1 \times A_2 = A_1 \cap A_2$.