Exercices

DÉRIVATION

Exercice 1/30

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x - 4$.

1. Calculer $f(1)$ et $f(1+h)$.
2. En déduire le rapport $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$
3. Déterminer le nombre dérivé de f en 1.
4. Vérifier le résultat en utilisant directement la dérivée de f.

Exercice 2/30

1. Établir la formule donnant la dérivée de $\sqrt{u}$, u étant une fonction de x strictement positive sur un intervalle I, de dérivée u'.
2. Calculer la dérivée de $\sqrt{x^2 + \sqrt{2x-1}}$.

Exercice 3/30

Pour chaque question, préciser l'ensemble de dérivation et calculer la dérivée de la fonction f définie ci-dessous.

1. $f(x) = -\dfrac{3x^4 - 8x}{4} - 6\sqrt{x}$
2. $f(x) = -\dfrac{3}{2x} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{8}{5x^3}$
3. $f(x) = 3\cos(x) - \dfrac{5\sin(x)}{2}$
4. $f(x) = (4x^2 - x)(3x - 1)$
5. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5}{3x + 1}$
6. $f(x) = xe^x$
7. $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{x}}$
8. $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^x$
9. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^3}$

Exercice 4/30

Pour chaque question, préciser l'ensemble de dérivation et calculer la dérivée de la fonction f définie ci-dessous.

1. $f(x) = (3x^2 + x - 1)^4$
2. $f(x) = 5\sqrt{x^2 - 1}$
3. $f(x) = \dfrac{4e^{-x}}{5} + e^{3x^2}$
4. $f(x) = \dfrac{4}{3(2x+1)^5}$
5. $f(x) = \left(\dfrac{2x-1}{x-5}\right)^3$
6. $f(x) = x\sqrt{2 + 3x^2}$
7. $f(x) = 4\cos(3x)$
8. $f(x) = x^2 \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$
9. $f(x) = \left(\sin\left(\dfrac{3}{x}\right)\right)^2$

Exercice 5/30

1. Soit $f \ : \ x \longmapsto (x^2-9)\sqrt{3-x}$. Préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f et étudier la dérivabilité de f en 3.
2. Soit $g \ : \ x \longmapsto |x|$, la fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$. Expliciter le taux d'acroissement de g en 0 pour $x<0$ et $x>0$, puis montrer que g n'est pas dérivable en 0.

Exercice 6/30

Soit $r \ : \ x \longmapsto \sqrt{x}$ la fonction racine, définie sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que r n'est pas dérivable en 0. Que peut-on dire de sa courbe au point $(0;0)$?
2. Soit $c \ : \ x \longmapsto x^2$ et la fonction produit $p \ : \longmapsto (c.r)(x) = c(x).r(x) = x^2\sqrt{x}$. Étudier la dérivabilité de p en 0.
3. Pour qu'une fonction produit $u.v$ soit dérivable en x_0, est-il nécessaire que u et v soient dérivables en x_0 ?

Exercice 7/30

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous sur $\mathbb{R}$:

- Déterminer la fonction dérivée et étudier son signe sur $\mathbb{R}$
- Dresser le tableau de variations de la fonction (préciser les limites aux bornes).
- Préciser les extremums et les tangentes horizontales éventuels.

1. $f(x) = x^3 - 12x - 8$
2. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
3. $f(x) = (2x+4)e^x$
4. $f(x) = x^2.e^{-2x}$

Pour la première fonction, donner l'équation de la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse 0.
Pour la deuxième, donner l'équation de la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse -1.

Exercice 8/30

Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x^2+1)^3$$

Exercice 9/30

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;3]$ par :

$$f(x) = (3-x)\sqrt{3-x}$$

Montrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $]-\infty;3]$.

Exercice 10/30

Étudier la convexité de la fonction $f \ : \ x \longmapsto x^3 + x^2 - 2x + 1$

Exercice 11/30

Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de dérivabilité, puis calculer la fonction dérivée.

1. $f_1(x) = (5x^2+1)^7$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{f_1(x)}$
3. $f_3(x) = \sqrt{x^4+1}$
4. $f_4(x) = e^{-5x+1}$
5. $f_5(x) = \sqrt{e^x+2}$
6. $f_6(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 12/30

Soit $f \ : \ x \longmapsto x + \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Déterminer le tableau de variations de f et en déduire que : pour tout $x \in]0;+\infty[, \ x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ et pour tout $x \in]-\infty;0[, \ x + \dfrac{1}{x} \leq -2$.

Exercice 13/30

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exp(x) \geq 1 + x$.
2. Montrer que $\forall x \in [0;+\infty[, \ \exp(x) \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.
3. En déduire que $\forall x > 0, \ \dfrac{\exp(x)}{x} > \dfrac{x}{2}$, puis déterminer la limite en $+\infty$ de $\dfrac{\exp(x)}{x}$.

Exercice 14/30

Pour chaque question, étudier la limite en α de la fonction f définie ci-dessous en écrivant $f(x)$ sous la forme $\dfrac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$, où la fonction dérivable g est à préciser.

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$ en $\alpha = 2$
2. $f(x) = \dfrac{(2x+1)^4-1}{x+1}$ en $\alpha = -1$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}-2\sin(x)}{3x-\pi}$ en $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$
4. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$ et $\alpha = 1$

Exercice 15/30

Pour chaque question, déterminer la convexité/concavité de la fonction f définie sur I ci-dessous.

1. $f(x) = x^2 + 5x + 3e^x$ avec $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = 3\cos(x) - \sin(x)$ avec $I = [-\dfrac{\pi}{2};0]$
3. $f(x) = 5\sqrt{x} - 4e^x + 2$ avec $I = \mathbb{R}_+^*$

Exercice 16/30

Étudier la convexité/concavité des quatre fonctions de l'exercice 5 et préciser les points d'inflexion de leurs courbes.

Exercice 17/30

En utilisant l'inégalité des tangentes, montrer les inégalités suivantes :

1. $x \in \mathbb{R},\ e^x \geq e.x$
2. $n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^+,\ x^{n+1} \geq (n+1)x - n$
3. $x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leq x - 1$
4. $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right],\ \sin(x) \leq x$

Exercice 18/30

On veut montrer que, pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right],\ \sin(x) \geq \dfrac{2}{\pi}x$

1. Montrer que la fonction sin est concave sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. En déduire l'inégalité proposée.

Exercice 19/30

1. Déterminer si les fonctions suivantes définies sur un intervalle I à préciser, sont convexes, concaves ou non.
   (a) $f_1(x) = 2x + 1$
   (b) $f_2(x) = x^4$
   (c) $f_3(x) = x^5$
   (d) $f_4(x) = \sqrt{x}$
   (e) $f_5(x) = \dfrac{1}{x}$
2. Dans un repère, on considère la courbe $\mathcal{C}\ :\ y = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$.
   Démontrer que $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion.

Exercice 20/30

Étudier le sens de variation de chacune des fonctions définies ci-dessous.

1. f est définie sur $[2,5; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x-5}$.
2. g est définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = (2\sqrt{x} - 1)^5$
3. h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$

Exercice 21/30

Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Démontrer que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en 0.
   (b) En déduire l'inégalité pour tout réel x,

$$e^x \geq x + 1$$

Exercice 22/30

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x + 2}$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Calculer $f'(x)$.
3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x + 1$$

   (a) Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation complet.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty; -2]$, que l'on notera α.
   Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
   (c) L'équation $g(x) = 0$ admet-elle d'autres solutions dans $\mathbb{R}$?
4. Dresser un tableau indiquant, en fonction de x, le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

Exercice 23/30

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - \frac{7}{2}x^2 + 3x$$

1. (a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Calculer pour tout réel x, $f'(x)$. En remarquant de 1 est racine de $f'(x)$, factoriser au maximum $f'(x)$.
   (c) En déduire les variations de f.
2. Calculer pour tout réel x, $f''(x)$. En déduire les intervalles où f est convexe, concave et les points d'inflexion de sa courbe représentative dans un repère du plan.

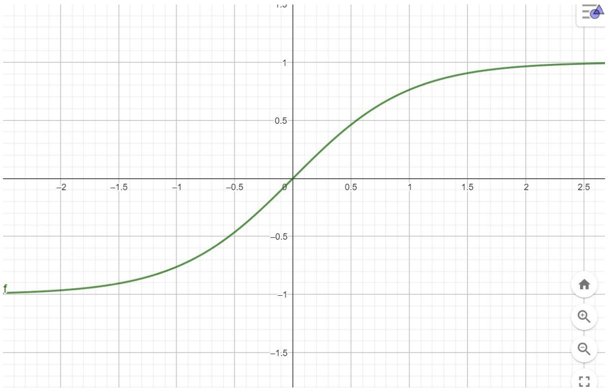
Exercice 24/30

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Donner la limite de f est $\pm\infty$.
2. Calculer pour tout réel x, $f'(x)$ et en déduire les variations de f.
3. Calculer et factoriser, pour tout réel x, $f''(x)$.
4. En déduire les intervalles où f est convexe et concave et le(s) point(s) d'inflexion de sa courbe représentative.

Exercice 25/30 : Problème : tangente hyperbolique

Dans un repère du plan ci-dessous, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f.



1. D'après la courbe, donner le sens de variations de f, les limites en $\pm\infty$, les intervalles où f est concave/convexe et le(s) point(s) d'inflexion de la courbe.
2. La fonction représentée est la fonction appelée tangente hyperbolique, notée tanh définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
   (a) Établir l'encadrement de $\tanh x$ observé à la question 1.
   (b) Démontrer que pour tout réel x,
$$\tanh x = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$
   En déduire la limite de tanh en $+\infty$.
   (c) Démontrer que pour tout réel x,
$$\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$
   En déduire la limite de tanh en $-\infty$.
   (d) Montrer que, pour tout réel x, $\tanh'(x) = 1 - (\tanh(x))^2$ et en déduire les variations de tanh.
   (e) Calculer pour tout réel x, $\tanh''(x)$.
   En déduire les intervalles où tanh est convexe et concave et le(s) point(s) d'inflexion de sa courbe représentative.

Exercice 26/30 : Vrai ou faux

1. Si deux fonctions f et g ne sont pas dérivables en x_0, alors la fonction produit $f \times g$ n'est pas dérivable en x_0.
2. La fonction inverse est srtictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$ car sa dérivée est strictement négative sur $\mathbb{R}^*$.
3. Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I telles que pour tout $x \in I,\ f(x) \leq g(x)$ alors pour tout $x \in I,\ f'(x) \leq g'(x)$.
4. Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I telles que pour tout $x \in I\ f'(x) \leq g'(x)$ alors pour tout $x \in I,\ f(x) \leq g(x)$.
5. Si une fonction dérivable est strictement croissante sur un intervalle I, alors sa fonction dérivée est strictement positive sur I.
6. La courbe d'une fonction dérivable peut admettre une tangente horizontale en un point sans que ce point sans que ce point corresponde à un extremum de la fonction.

7. Si une fonction est dérivable en x_0, sa courbe représentative est toujours située soit au-dessous, soit au-dessus de sa tangente, au voisinage du point d'abscisse x_0.
8. La somme de deux fonctions convexes sur un intervalle I est une fonction convexe sur I.
9. Le produit de deux fonctions convexes sur un intervalle I est une fonction convexe sur I.
10. La courbe d'une fonction peut admettre une infinité de points d'inflexion.

Exercice 27/30 : **

1. Soit x_0 un réel fixé et f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x_0)$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}$. On veut montrer que $f'(x_0) = 0$.
   (a) Étudier le signe de $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ en distinguant les cas $x < x_0$ et $x > x_0$.
   (b) En déduire le signe des limites à gauche et à droite du taux d'accroissement de f en x_0 puis conclure.
2. **Application :** soit $f : x \longmapsto ax^2 + bx + 2$ une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer les réels a et b sachant que $\Omega(1;3)$ est le sommet de la parabole représentative de f.

Exercice 28/30 : *

Pour chaque question, déterminer la dérivée $n-$ième sur I de f définie ci-dessous.

1. $f(x) = e^{2x+1}$ avec $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ avec $I = \mathbb{R}^*$

Exercice 29/30 : *

Soit $f : x \longmapsto \exp(x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la dérivée $n-$ième ($n \in \mathbb{N}$) de f sur $\mathbb{R}$ est de la forme $f^{(n)}(x) = P_n(x)\exp(x^2)$ où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n.

Exercice 30/30 : *

1. En reconnaissant la limite d'un taux d'accroissement, démontrer que
$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1 \text{ et } \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$
2. En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{2x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{4x^2} - 1}{4x^2}$
3. Transformer les écritures de $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{3x}$ et de $g(x) = \dfrac{1 - e^{-2x}}{x}$ pour faire apparaître une forme $\dfrac{\sin(y)}{y}$ (respectivement $\dfrac{e^y - 1}{y}$), puis déterminer leurs limites en 0.
4. Déterminer la limite en $\alpha = +\infty$ de $f(x) = x^2.\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.