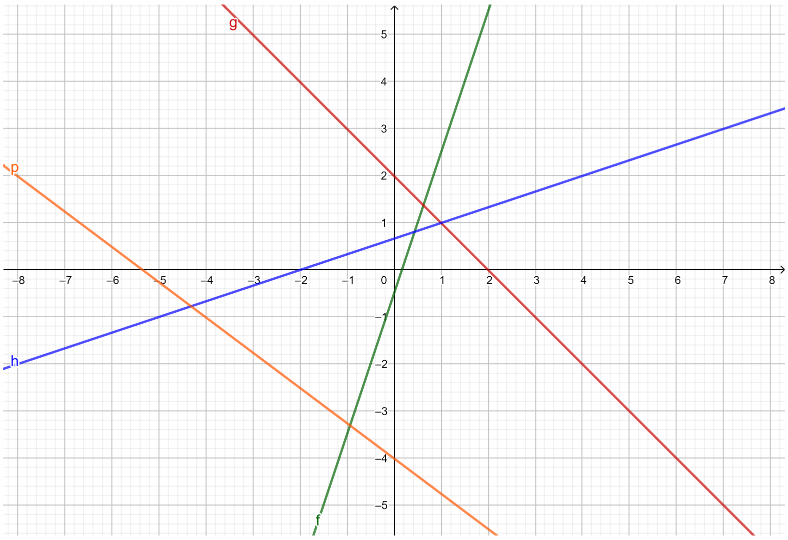
Corrigé : Évaluation formative

Les fonctions

	Exercice/question	Niveau acquisition	Remarque
Représenter			
Raisonner			

Exercice 1/6 : Expression algébrique d'une droite

Donner les expressions algébriques des fonctions représentées sur le vidéo projecteur :



Solution :

- Courbe rouge : $g(x) = -x + 2$
- Courbe verte : $f(x) = 3x - 0,5$
- Courbe orange : $p(x) = -\dfrac{3}{4}x - 4$
- Courbe bleue : on utilise les points de coordonnées $(1;1)$ et $(4;2)$ qui sont sur la courbe représentative de la fonction h :
  $m = \dfrac{2-1}{4-1} = \dfrac{1}{3}$
  On cherche l'ordonnée à l'origine à l'aide du point de coordonnées $(1;1)$:
  $y = \dfrac{1}{3}x + p$ donc $1 = \dfrac{1}{3} \times 1 + p$ d'où $p = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$
  Finalement $h(x) = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$

Exercice 2/6 : Fonctions affines

Pour chacune des fonctions ci-dessous, **dire si elle est affine ou non**, **si oui**, donner : son **sens de variation** ; son **tableau de signes** ; sa **représentation graphique** dans un repère.

1. $f(x) = \dfrac{21 - 14x}{7}$;
2. $g(x) = 2x^2 - 1$;
3. $h(x) = x(1 - 2x) + 2(x + 1)^2$;
4. $j(x) = (\sqrt{x})^2 - 2$;

Solution :

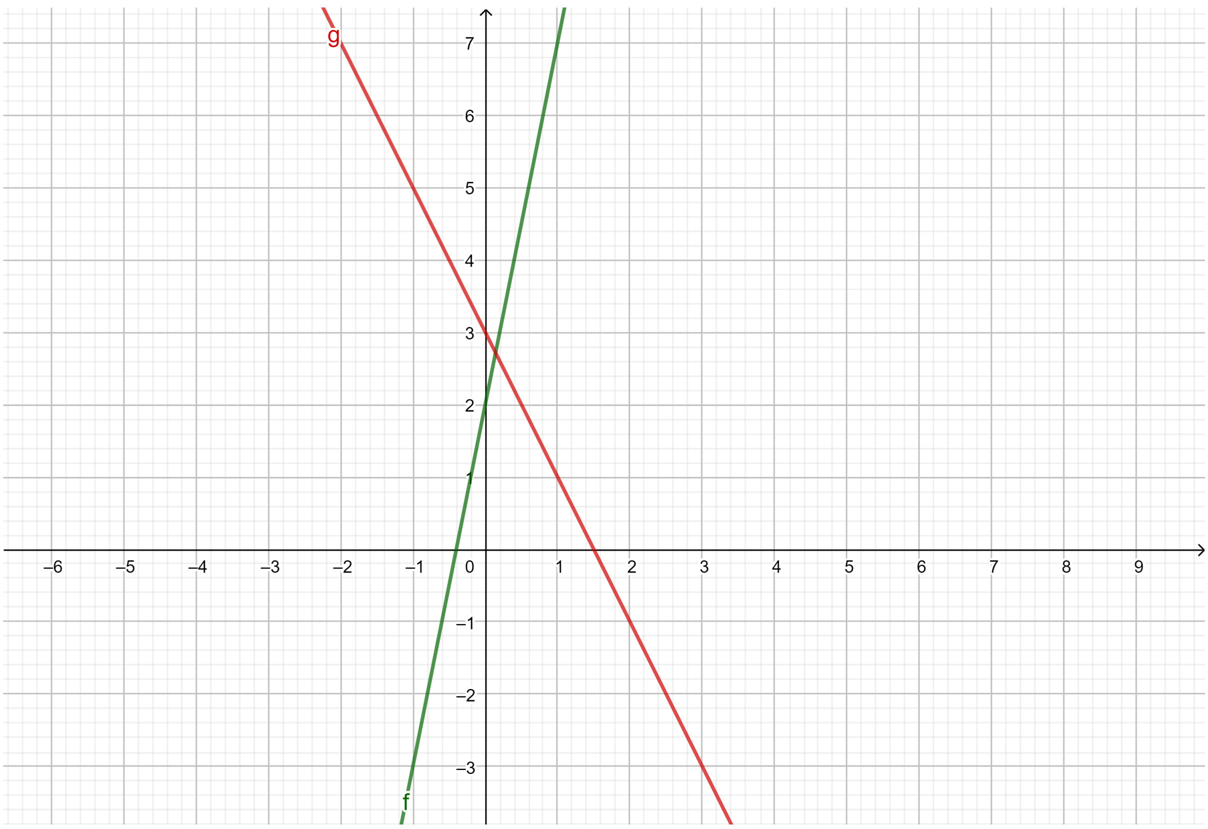
1. $f(x) = -2x + 3 \longrightarrow$ affine
   Le coefficient directeur est -2 qui est un réel négatif, donc f est décroissante.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

2. $g(x) = 2x^2 - 1 \longrightarrow$ non affine ;
3. $h(x) = 5x + 2 \longrightarrow$ affine
   Le coefficient directeur est 4 qui est un réel positif, donc h est croissante.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

4. $j(x) = x - 2 \longrightarrow$ non affine car définie sur $\mathbb{R}_+$ en raison de la racine carré.



Exercice 3/6 : Variations des fonctions de référence et inéquations

Répondre aux questions suivantes **à l'aide des variations des fonctions de référence.**

1. Si $x \in [-2\,;\,2]$, à quel intervalle appartient x^2 ?
2. Si $x \in [1\,;\,9]$, à quel intervalle appartient $\sqrt{x}$?

Résoudre, **à l'aide des variations des fonctions de référence**, les inéquations suivantes :

1. $x^2 > 16$,
2. $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{5}$,

Solution :

1. Si $x \in [-2\,;\,2]$, alors $-2 \leq x \leq 2$
   Or la fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$, et est croissante sur $[0; +\infty[$.
   On “ coupe ” donc l'inégalité en deux :

   $-2 \leq x \leq 0$
   donc $(-2)^2 \geq x^2 \geq 0^2$(fonction décroissante)
   donc $4 \geq x^2 \geq 0$

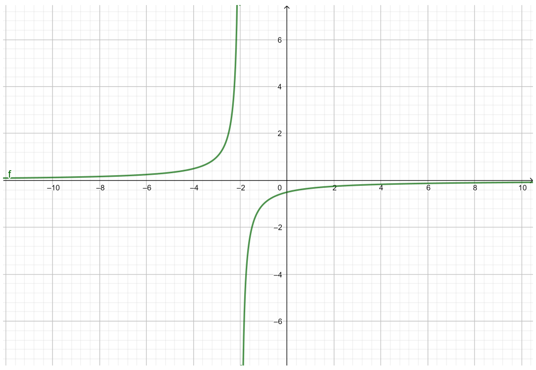
   $0 \leq x \leq 2$
   donc $0^2 \leq x^2 \leq 2^2$ (fonction croissante)
   donc $0 \leq x^2 \leq 4$

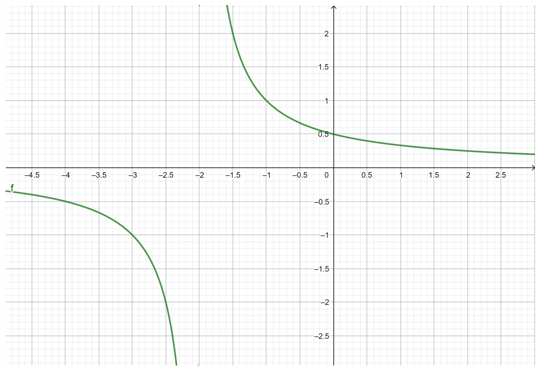
   Finalement $f(x) \in [0; 4]$
2. Si $x \in [1\,;\,9]$, alors $1 \leq x \leq 9$
   La fonction racine carré est croissante sur $[0; +\infty[$
   donc $\sqrt{1} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{9}$ finalement $1 \leq \sqrt{x} \leq 3$ D'où $f(x) \in [1; 3]$

1. $x^2 > 16$ On utilise la fonction racine carré définie sur $[0; +\infty[$ et croissante sur son intervalle de définition.
   $\sqrt{x^2} > \sqrt{16}$ (le sens de l'inégalité ne change pas !) Donc $|x| > 4$ d'où $x \geq 4$ ou $x \leq -4$
   Finalement $x \in]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[$,
2. La fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$ donc $x \geq 5$
   Or la fonction inverse est strictement négative sur $]-\infty; 0[$
   D'où $x \in]-\infty; 0[\cup [5; +\infty[$,

Exercice 4/6 : Variations d'une fonction

Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :





1. Donner le tableau de variation de la fonction f (en vous inspirant de celui de la fonction inverse). Expliciter ses variations à l'aide d'une phrase.
2. En vous aidant du zoom sur la fonction ci-dessus, répondre aux questions suivantes :
   (a) Quel est le maximum de la fonction f sur $[-4;-2[$.
   (b) Quel est le minimum de la fonction f sur $]-2;0]$.

Solution :

1.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

La fonction f est croissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $]-2;+\infty[$.

2. (a) $-0,5$
   (b) $0,5$

Exercice 5/6 : Application

Une chocolaterie a une spécialité de chocolats « troubadour ». Le coût de fabrication est de 20 euros le kilogramme auquel on ajoute 65 euros de frais fixes.

1. Déterminer le coût de fabrication C en fonction de x, le poids de chocolat en kg.
2. On désigne par $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ le coût moyen de fabrication de ces chocolats.
   (a) Quel est le coût moyen de fabrication de 10 kg de chocolats ?
   (b) Montrer que $C_m(x) = 20 + \dfrac{65}{x}$.
3. Étudions le sens de variation de la fonction C_m définie sur $[1;50]$ tels que $x < x'$.
   (a) Comparer $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x'}$, puis $\dfrac{65}{x}$ et $\dfrac{65}{x'}$.
   (b) Comparer $C_m(x)$ et $C_m(x')$, en déduire le sens de variation de C_m et interpréter.

Solution :

1. $C(x) = 20x + 65$

   (a) $C_m(10) = 26,5$

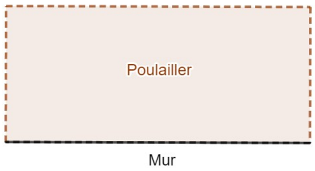
   (b) $C_m(x) = 20 + \dfrac{65}{x}$

2. (a) Voir cours

   (b) C_m est strictement décroissante.

Exercice 6/6 : Bernard construit un poulailler !

1. Montrer que $20x - 2x^2 = -2(x-5)^2 + 50$.
2. Un fermier dispose d'un grillage d'une longueur de 20 m et désire l'utiliser pour clôturer un poulailler rectangulaire attenant à sa grange. Quelles doivent être les dimensions du poulailler pour que la surface clôturée soit la plus grande possible ?



Solution :

Notons x la largeur du rectangle, et y la longueur.
On a donc $2x + y = 20$ d'où $y = 20 - 2x$.
L'aire du rectangle est donc $x(20-2x) = 20x - 2x^2$.
Or d'après la question 1, $20x - 2x^2 = -2(x-5)^2 + 50$ or le terme $-2(x-5)$ est négatif, donc pour que l'aire soit la plus grande possible, il faut que ce terme soit nul. Autrement dit, $x = 5$, et $y = 20 - 2 \times 5 = 10$.
Dimensions : 5×10 avec une aire de $50m^2$.