Version 250325

2024/2025

Équations différentielles

Alexis Clairaut (1713-1765) est peu connu ; c'est pourtant l'un des plus grands mathématiciens du XVIII^e siècle. Incroyablement précoce, il fait à treize ans sa première communication à l'Académie française, assemblée où il est admis à 18 ans grâce à une dispence d'âge accordée par le Roi. La même année, il publie un remarquable traité de géométrie analytique. Dans les années 1730, il met au point des techniques de résolution d'équations différentielles grâce auxquelles il prévoit les perturbations des orbites de planètes ce qui lui vaut une grande renommée.

Définition

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction et où interviennent des dérivées de cette fonction.

Exemple

Une équation du type $f'(x) = 5$ est une équation différentielle d'inconnue une fonction, $f(x)$. Ici les solutions sont toutes les fonctions du type $f(x) = 5x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Donner **toutes** les solutions de l'équation différentielle suivante : $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2x$

Vérifier que la fonction $f(x) = x^3 + x^2 + 2$ définie sur $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle suivante : $f'(x) = 3x^2 + 2x$.

I Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Définition

Une équation linéaire d'ordre 1 est une équation d'inconnue une fonction, notée généralement y, qui met en jeu la fonction y ainsi que sa fonction dérivée y'.
Soit f $I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathbb{R}$ un réel. Une équation du type

$$y' = ay + f(x) \text{ avec } x \in I \qquad (F)$$

est une équation linéaire d'ordre 1.

Remarque

Une équation mettant en jeu une fonction inconnue et ses n premières dérivées est appelée équation différentielle d'ordre n.

Définition

Une solution de (F) sur I est une fonction y définie dans I et qui vérifie :

- $y \ : \ I \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable dans I
- Pour tout $x \in I$, $y'(x) = ay(x) + f(x)$.

I.1 Équations homogène

On appelle équation homogène, l'équation tel que $f(x) = 0$. C'est à dire $y' = ay$.

Propriété

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ avec $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions d'équation $y = Ce^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Démonstration

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.
  Alors $f'(x) = aCe^{ax} = af(x)$ donc $f'(x) = af(x)$ donc f est solution de $y' = ay$.
- Réciproquement, soit f une solution de l'ED $y' = ay$.
  Et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$.
  g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = -ae^{-ax} \times f(x) + e^{-ax} \times f'(x) = e^{-a} \times (-af(x) + f'(x)) = 0$.
  Donc g est une fonction constante $g(x) = e^{-ax} \times f(x) = C$ avec $C \in mathbbR$. D'où $f(x) = Ce^{ax}$.

Exemple

Résoudre complètement l'équation différentielle suivante $3y' + 5y = 0$. Donner alors l'unique solution telle que $y(1) = 2$.

Propriété

Soient f et g deux solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ avec $a \in \mathbb{R}$:

- $f + g$ est donc également solution de l'équation différentielle
- kf avec $k \in \mathbb{R}$ est également solution de l'équation différentielle.

II Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.

On considère maintenant le cas où $f(x) = b$. C'est à dire $y' = ay + b$ avec a et b des réels.

Propriété

Soit l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$. La fonction $y = -\dfrac{b}{a}$ est une solution particulière constante de cette équation différentielle.

Démonstration

Soit $g(x) = -\dfrac{b}{a}$.

Alors $g'(x) = 0$ et $a \times g(x) + b = a \times (-\dfrac{b}{a}) + b = 0 = g'(x)$
Donc g est bien solution de l'ED.

Propriété

L'équation différentielle $E : y' = ay + b$ avec $a \neq 0$ a pour solution les fonctions de la forme :

$$y = u(x) + v(x)$$

u est la solution particulière constante de E
v est une solution quelconque de $y' = ay$, appelée équation homogène.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Propriété

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est un réel.
  Alors $f'(x) = aCe^{ax} = af(x) + b$ donc $f'(x) = af(x) + b$ donc f est solution de $y' = ay + b$.
- Réciproquement, soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et g la solution de (E) tel que $g(x) = -\frac{b}{a}$.
  Considérons la fonction $(f - g)$, nous allons montrer que

$$(f-g) \text{ solution de EH} \Longleftrightarrow f \text{ solution de E}$$

  - Si f est solution de E, alors
    $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = af(x) + b - 0 = a(f(x) + \frac{b}{a}) = a(f-g)(x)$ donc $(f-g)$ est solution de l'équation homogène.

  - Si $(f-g)$ est solution de l'équation homogène, alors $(f-g)(x) = Ce^{ax}$ avec C réel.
    On a alors $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = a(f(x) - g(x)) = af(x) - ag(x)$
    Donc $f'(x) - af(x) = g'(x) - ag(x)$
    Or g est solution de (E), donc $g'(x) - ag(x) = b$
    D'où $f'(x) - af(x) = b$ et donc f solution de E.

  $(f-g)(x) = Ce^{ax}$ donc $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$.

Démonstration

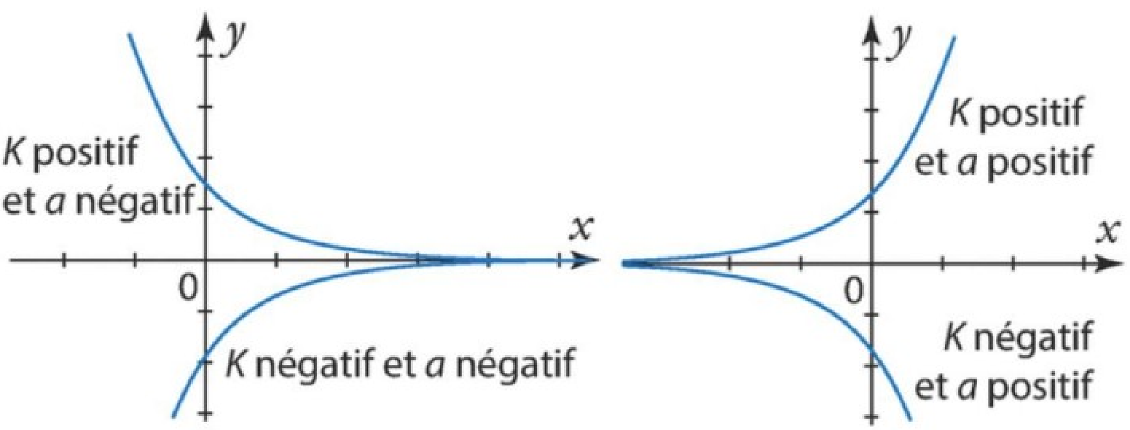
Exemple

Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante : $3y' - y = 6$

a. Déterminer la forme générale des solutions de cette équation.

b. Donner alors l'unique solution tel que $y(0) = 1$.

L'ensemble des fonctions solutions forme une famille infinie que l'on peut classer en trois catégories suivant le signe du paramètre a et du signe de la constante C notée K sur le graph



Remarque

III Équations différentielles linéaires du premier ordre de la forme $y' = ay + f(x)$.

On considère maintenant le cas où $f(x)$ est une fonction continue sur I. C'est à dire $y' = ay + f(x)$ avec a un réel.

Théorème

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose connue une fonction $y_0 : I \mapsto \mathbb{R}$ solution de (F).
Alors les solutions de (F) sont toutes de la forme :

$$y(x) = y_0(x) + Ce^{ax}$$

où C est une constante réelle. On dit que y_0 est une solution particulière.

Théorème

Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $c_0 \in \mathbb{R}$. L'équation (E) possède une unique solution y qui vérifie la condition initiale $y(x_0) = c_0$.

Exemple

On considère l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.

a. Démontrer que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ est solution particulière de l'ED.

b. En déduire la forme générale de toutes les solutions de l'équation différentielle.