PAU 1884 LABOR ET DILECTIO

2024/2025

Équations différentielles

Alexis Clairaut (1713-1765) est peu connu ; c'est pourtant l'un des plus grands mathématiciens du XVIII^e siècle. Incroyablement précoce, il fait à treize ans sa première communication à l'Académie française, assemblée où il est admis à 18 ans grâce à une dispence d'âge accordée par le Roi. La même année, il publie un remarquable traité de géométrie analytique. Dans les années 1730, il met au point des techniques de résolution d'équations différentielles grâce auxquelles il prévoit les perturbations des orbites de planètes ce qui lui vaut une grande renommée.

I Notion d'équations différentielles

Exemple

Une équation du type $f'(x) = 5$ est une équation différentielle d'inconnue une fonction, $f(x)$. Ici les solutions sont toutes les fonctions du type $f(x) = 5x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Donner **toutes** les solutions de l'équation différentielle suivante : $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2x$

Vérifier que la fonction $f(x) = x^3 + x^2 + 2$ définie sur $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle suivante : $f'(x) = 3x^2 + 2x$.

II Équations différentielles et fonction exponentielle.

Propriété

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ avec $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions d'équation $y = Ce^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exemple

Résoudre complètement l'équation différentielle suivante $3y' + 5y = 0$. Donner alors l'unique solution telle que $y(1) = 2$.

Propriété

Soient f et g deux solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ avec $a \in \mathbb{R}$:

- $f + g$ est donc également solution de l'équation différentielle
- kf avec $k \in \mathbb{R}$ est également solution de l'équation différentielle.

III Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.

Propriété

Soit l'équation différentielle $y' = ay + b$. La fonction $y = -\frac{b}{a}$ est une solution particulière constante de cette équation différentielle.

Démontrer la propriété ci-dessus.

Propriété

L'équation différentielle $E : y' = ay + b$ avec $a \neq 0$ a pour solution les fonctions de la forme :

$$y = u(x) + v(x)$$

u est la solution particulière constante de E
v est une solution quelconque de $y' = ay$, appelée équation homogène.

Propriété

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exemple

Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante : $3y' - y = 6$

a. Déterminer la forme générale des solutions de cette équation.
b. Donner alors l'unique solution tel que $y(0) = 1$.

IV Équation différentielle particulière : un exemple pour comprendre

Propriété

Soit l'équation différentielle suivante $y'' + \omega^2 y = 0$. Les solutions de cette équation sont de la forme $y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$ avec C_1 et C_2 deux réels.

Exemple

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$