Corrigé : Évaluation

Continuité/Limites

Exercice 1/3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{6\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x+3}{6-x}$$

1. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f.
2. Donner les équations et la nature des asymptotes.

Solution :

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -2$ donc asymptote horizontale d'équation $y = -2$ en $\pm\infty$
   $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 6^+} f(x) = -\infty$ donc asymptote verticale d'équation $x = 6$.

Exercice 2/3

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x}$$

. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote en $+\infty$ dont on donnera la nature et une équation.
2. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $[0;+\infty[$:

$$f'(x) = (1-x)e^{-x}$$

3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$, préciser le(s) éventuel(s) extremums.
4. Déterminer, sur l'intervalle $[0;+\infty[$ le nombre de solutions de l'équation :

$$f(x) = \frac{367}{1000}$$

Solution :

1. Par croissance comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ donc asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
2. La fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$f'(x) = e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = e^{-x} \times (1-x)$$

3.

x	0	1	$+\infty$
f	0	e^{-1}	0

Un maximum de coordonnées $(1; e^{-1})$ et un minimum de coordonnées $(0; 0)$.

4. Corollaire du TVI sur $[0; 1]$ puis sur $[1; +\infty[$. Deux solutions.

Exercice 3/3

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique. Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes. Pour préserver l'équilibre du milieu naturel le nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent des insectes, les biologistes choisissent une modélisation.
Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n) définie par $v_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2$, où pour tout entier naturel n, v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
2. On considère la fonction f définie sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1,6x - 1,6x^2$.
   (a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
   (b) Montrer que la fonction f est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est convergente.
   On note ℓ la valeur de la limite.
   (c) Déterminer la valeur de ℓ. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ? Justifier la réponse.
4. On donne ci-contre la fonction *seuil*, écrite en langage Python.
   (a) Qu'observe-t-on si on saisit *seuil(0,4)*
   (b) Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de *seuil(0.35)*. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(a) :
    v=0.1
    n=0
    while v<a :
      v=1.6*v-1.6*v*v
      n=n+1
    return n
```

Solution :

1. $v_1 = 0,144$
2. (a) $x = 0,375$ et $x = 0$
   (b) $f'(x) = 1,6 - 3,2x > 0$ pour $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$
3. (a) Utiliser l'itératrice...
   (b) Théorème de convergence monotone...

(c) Utiliser question 2a, $\ell = 0,375$ donc équilibre préservé.

4. (a) On observe au bout de combien de mois la population d'insectes dépassera 400 000 individus. (Pas de calculatrice pour le contrôle)

   (b) On observe au bout de combien de mois la population d'insectes dépassera 350 000 individus. (Pas de calculatrice)