Exercices

Nombres complexes

Exercice 1/3

Démontrer les formules d'addition pour tangente.

Exercice 2/3

On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = (2-i)z_n$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = |z_n|$.

1. Montrer que la suite (z_n) est géométrique.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Écrire en langage Python, une fonction de paramètre p qui renvoie la plus petite valeur de n telle que $u_n > p$, où p est un réel quelconque.

Exercice 3/3

On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = 16$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n le point d'affixe z_n et r_n le module de z_n. Par ailleurs, on introduit la longueur L_n de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant par $A_1,\ A_2, \dots,\ A_{n-1}$.
Autrement dit :

$$L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_kA_{k+1}$$

1. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de r_n en fonction de n.
3. Calculer la limite de la suite (r_n).
4. Donner une interprétation géométrique.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.
6. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de L_n en fonction de n.
7. Calculer la limite de la suite (L_n).