Version 221103

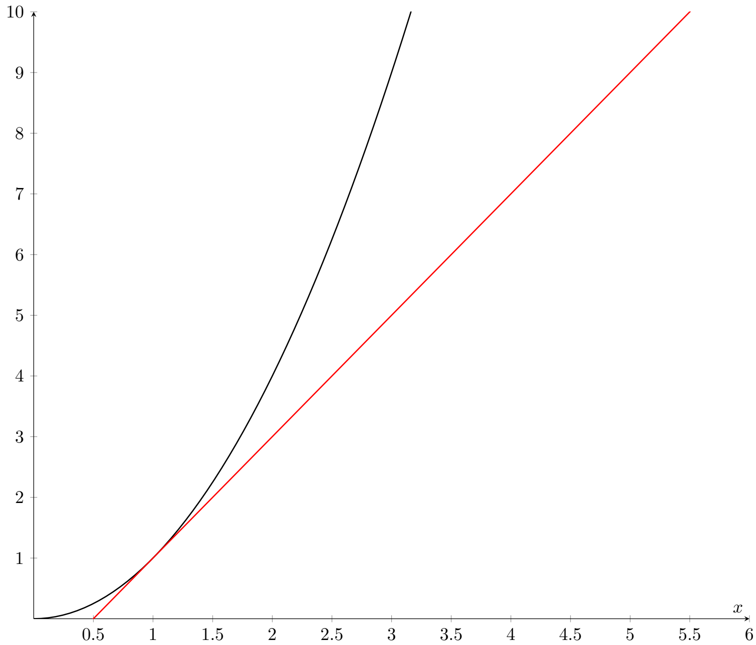
2022/2023

Dérivation

I Rappels sur la dérivation

I.1 Notion de tangente

On a tracé ci-dessous la fonction d'équation $y = x^2$ et la droite $y = 2(x-1)+1$.
On remarque que lorsque $x = 1$ la droite a une pente identique à la courbe. La droite est confondue avec la courbe en ce point.



Définition

La tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.
Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple

Déterminer une équation de la tangente à la fonction $f(x) = x^3 + 2x + 3$ en A tel que $x_A = 1$.

I.2 Dérivées usuelles

Fonction f	Ensemble de définition	Dérivée f'	Ensemble de définition
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^{kx},\ k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = ke^{kx}$	$\mathbb{R}$

Exemple

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes, calculer leur dérivée, puis donner le domaine de définition de la dérivée.

a. $f(x) = e^{6x}$ b. $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$ c. $f(x) = -\dfrac{5}{x^6}$

I.3 Dérivée des opérations de fonctions

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Les fonctions suivantes sont donc dérivables sur I.

$f+g$	$(f+g)' = f' + g'$
kf	kf'
fg	$(fg)' = f'g + fg'$
$\dfrac{1}{f}$ sur I, où f ne s'annule pas	$\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$ sur I, où f ne s'annule pas
$\dfrac{f}{g}$ sur I, où g ne s'annule pas	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ sur I, où g ne s'annule pas
$f+g$	$(f+g)' = f' + g'$

Exemple

Calculer les dérivées des fonctions suivantes après avoir donné l'intervalle sur lequel elles sont dérivables :

a. $f(x) = (2x^2 - 5x)(3x - 2)$

b. $g(x) = \dfrac{6x - 5}{x^3 - 2x^2 - 1}$

I.4 Étude des variations d'une fonction

Théorème

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I :

- Si $f'(x) \leq 0$ alors la fonction f est décroissante
- Si $f'(x) \geq 0$ alors la fonction f est croissante

Exemple

Étudier les variations de la fonction $f(x) = x^2 - 4x$ sur son intervalle de définition.

I.5 Dérivée des fonctions composées

Fonction	Dérivée
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$
u^2	$2u'u$
e^u	$u'e^u$

Exemple

Déterminer la dérivée des fonctions définies par :

a. $f(x) = (2x^2 + 3x - 3)^2$

b. $g(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

b. En déduire les variations de la fonction f.