Dérivation

I Notion de limite en 0 d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{(x+1)^2 - 1}{x}$. Cette fonction n'est pas définie en 0, on ne peut donc pas calculer d'image de 0 par la fonction f.
Nous allons alors nous intéresser aux valeurs prises par f lorsque x devient très proche de 0.
Calculer les images suivantes à l'aide de votre calculatrice :

- $f(0,01) =$
- $f(0,001) =$
- $f(0,0001) =$
- $f(-0,1) =$
- $f(-0,01) =$
- $f(-0,001) =$

Que constate t-on lorsque x est très proche de 0 ?

II Nombre dérivé

Soit une fonction f. Soit A et M deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et $a+h$. Le coefficient directeur de la droite (AM) est égal

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Lorsque le point M se rapproche du point A, le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0.
Ce coefficient directeur s'appelle **le nombre dérivé** de f en a et on le note $f'(a)$.
Le nombre dérivé de f en a est :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

> **Exemple**
>
> Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$
> Calculer le nombre dérivé de la fonction f en $x = 2$.

On note la dérivé de f en a :
$f'(a)$ ou $\dot{x}$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ ou $\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)_a$

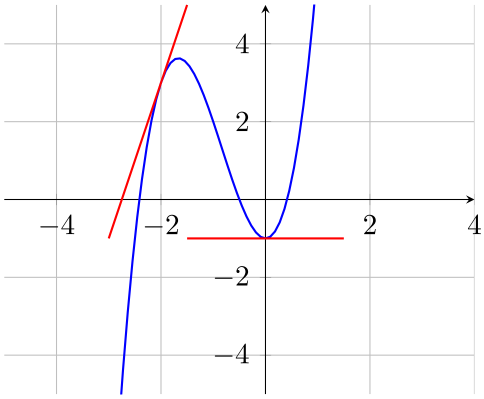
III Notion de tangente

Définition

La tangente à la courbe représentative d'une fonction f au point A d'abscisse a est la droite :

- Passant par $A(a, f(a))$ (point commun avec C_f)
- De coefficient directeur le nombre $f'(a)$

Ci-contre, on a représenté en rouge les tangentes à C_f au point d'abscisse -2 et au point d'abscisse 0.



Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x + 2$.

a. Calculer le nombre dérivé de f au point d'abscisse 2.

b. En déduire le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.

c. Par quel point passe cette tangente ?

d. A l'aide du coefficient directeur de la tangente, et du point connu, en déduire un autre point appartenant à la tangente à C_f en 2

e. En déduire l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.

Propriété

Une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + x + 1$.
Déterminer une équation de tangente à la courbe représentative de f au point de la courbe d'abscisse 1.

Remarque

Au voisinage du point de coordonnées $(a; f(a))$, la tangente est une approximation affine de la courbe représentative de f. Cela signifie que l'équation de la tangente permet d'obtenir des valeurs approchées d'images par f pour des valeurs proches de a.

Dans l'exemple précédent, calculer une approximation de la fonction f au point d'abscisse 1,01.
Calculer enfin $f(1,01)$ puis comparer les deux nombres.

IV La fonction dérivée

Définition

La fonction qui à tous réels x associe le nombre dérivé de f en x est appelée la fonction dérivée de f et se note f'.

V Dérivées usuelles

Fonction f	Ensemble de définition	Dérivée f'	Ensemble de définition
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$

Remarque

La dérivée d'une fonction du type $k \times f(x)$ est $k \times f'(x)$.
La dérivée de la somme est la somme des dérivées : $(u+v)' = u' + v'$.
Exemple : $(3x^2 + 2)' = 3 \times 2 \times x + 0 = 6x$

Exemple

Dériver les fonctions suivantes après avoir précisé l'intervalle sur lequel la fonction est définie et dérivable :

a. $f(x) = 3x$
b. $f(x) = 5x + 5$
c. $f(x) = x^2 + 2x + 1$
d. $f(x) = 6x^3 + x^2 + 1$
e. $f(x) = \frac{3}{x} + 5x$
f. $f(x) = -3x^2 + 3x - 1$
g. $f(x) = -5x^5 - 4x^3 + x^2$
h. $f(x) = \frac{2}{x^2}$

VI Opération sur les fonctions dérivées

Propriété

Dans le cas de l'inverse d'une fonction, ou du produit/quotient de deux fonctions définies et dérivables sur I, les relations suivantes s'appliquent pour l'obtention des dérivées :

- $(uv)' = u'v + uv'$
- $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- $(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$

Dans le cas d'une fonction composée, il faudra appliquer la relation suivante :

- $f(g(x)) = g'(x) \times f'(g(x))$
  Exemple : $(\cos(x^2))' = 2x \times (-\sin(x^2))$

Exemple

Calculer les dérivées des fonctions suivantes après avoir précisé l'intervalle sur lequel la fonction est définie et dérivable :

a. $f(x) = (3x^2 + x + 1)(x^5 - x^2)$

b. $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$

c. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x^6}{x + 5x^2}$

d. $f(x) = \cos(x) \times \sin(x)$

e. $f(x) = 3\cos(2t + \pi)$

f. $f(x) = -4\sin(-3t - \frac{\pi}{4})$

VII Étude des variations d'une fonction

Théorème

Soit une fonction f définie sur I.

- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$.

a. Calculer la fonction dérivée de f.

b. Déterminer le signe de f' en fonction de x

c. Dresser le tableau de variations de f.

VIII Les extremums d'une fonction : maximum et minimum

Théorème

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.
Si la dérivée f' de f s'annule et change de signe en un réel c de I alors f admet un extremum local en $x = c$.

Exemple

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 2x + 4$ admet-elle un extremum sur $\mathbb{R}$?