Version 220318

2021/2022

Variation d'une fonction

I Étude de fonction : Monotonie et extremums.

I.1 Monotonie d'une fonction

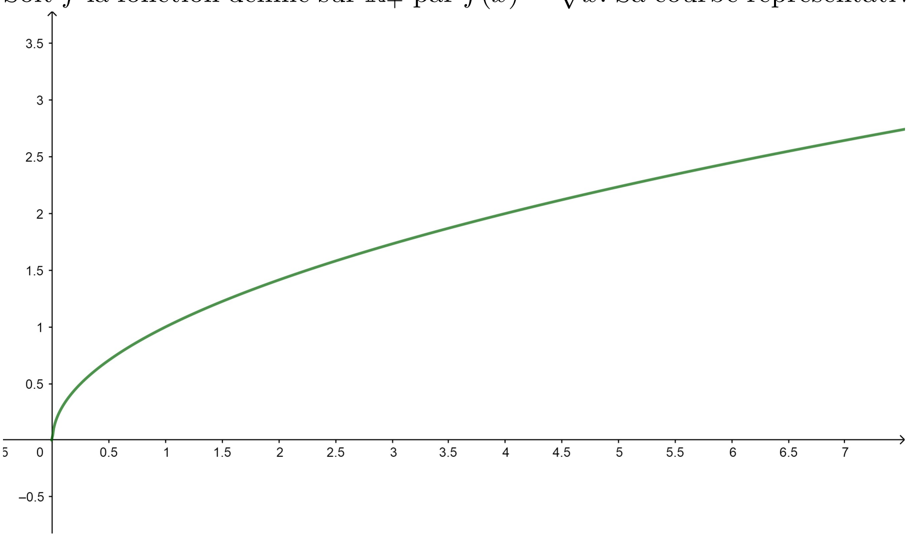
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Dire que f est **croissante** sur I signifie que pour tous réels a et b de I : si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$.
- Dire que f est **décroissante** sur I signifie que pour tous réels a et b de I : si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$
- Dire que f est **constante** sur I signifie que pour tous réels a et b de I : $f(a) = f(b)$
- Dire que f est **monotone** sur I signifie que f est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

Exemples

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Sa courbe représentative est donnée ci-dessous.



On remarque que pour des valeurs de x ordonnées (ordre croissant), les images par f sont dans le même ordre : $1 < 4$ et $f(1) < f(4)$ car $1 < 2$
On dit que la fonction f est croissante sur son ensemble de définition.

Remarque

Intuitivement, on dit qu'une fonction est croissante lorsqu'en parcourant la courbe de la gauche vers la droite, on « monte ». On dit qu'une fonction croissante **conserve l'ordre**.

On dit qu'une fonction est décroissante lorsqu'en parcourant la courbe de la gauche vers la droite, on « descend ». On dit qu'une fonction décroissante **renverse l'ordre**

I.2 Extremums d'une fonction

Définition

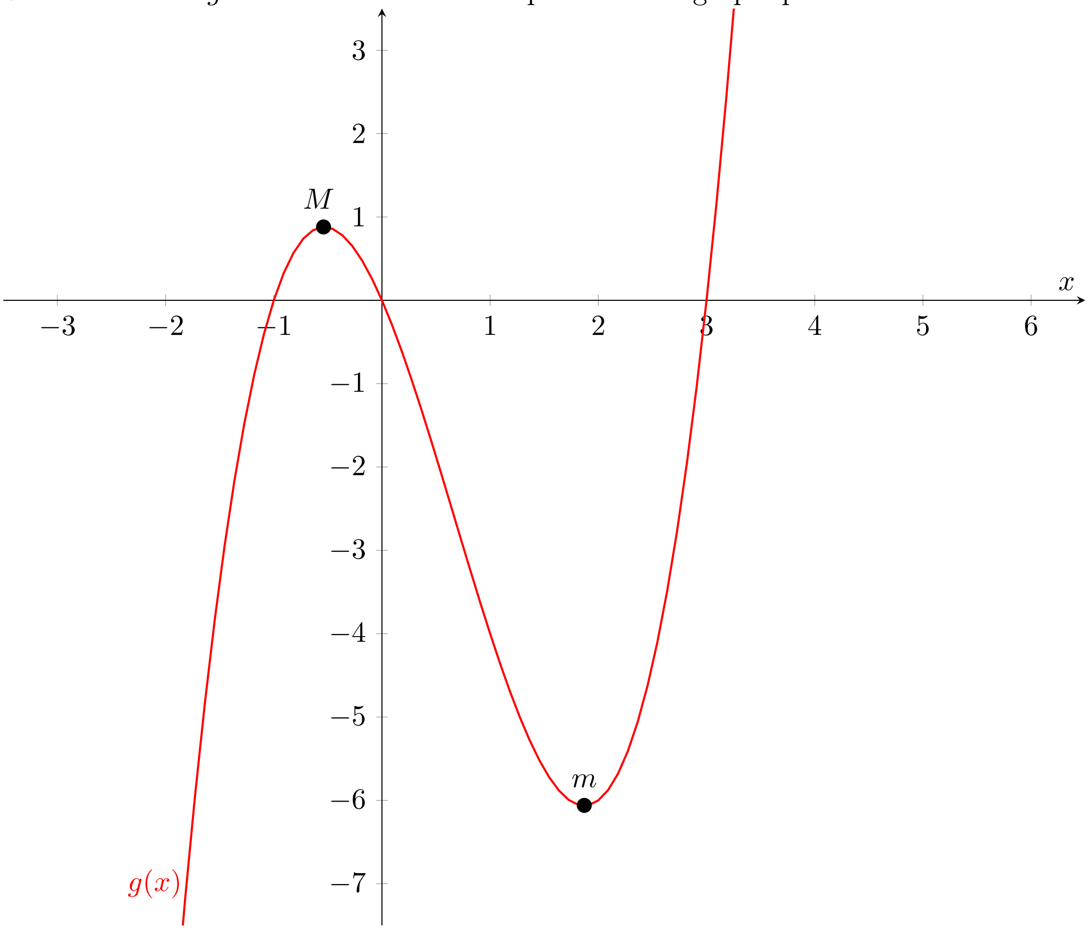
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. a et b deux nombres réels de I.
Dire que f admet **un maximum** M en a, tel que $f(a) = M$, sur I signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f(x) \leq M$

Dire que f admet **un minimum** m en b, tel que $f(b) = m$, sur I signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f(x) \geq m$

Un **extremum** est soit un minimum, soit un maximum.

Exemple

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique et donnée ci-dessous :



g admet un maximum M sur l'intervalle $[-1, 0]$ atteint en $(-0,5; 1)$.
g admet un minimum m sur l'intervalle $[0, 3]$ atteint en $(2; -6)$.

I.3 Tableau de variations d'une fonction

Définition

Un tableau de variations résume les variations d'une fonction en faisant apparaître les intervalles où elle est monotone et les éventuels extremums

Exemple

On reprend la fonction g définie précédemment. g est croissante sur $]-\infty;-0,5]$, décroissante sur $[-0,5;2]$ et croissante sur $[2;+\infty[$.

x	$-\infty$		-0.5		2		$+\infty$
$g(x)$			1				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-6		

II Fonctions affines et linéaires

Définition

Une fonction affine f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ où m est le **coefficient directeur** et p est **l'ordonnée à l'origine** de la droite représentative.
Lorsque $p = 0$, la fonction f définie par $f(x) = mx$ est **une fonction linéaire**.

La représentation graphique d'une fonction affine est **une droite** (passant par l'origine si la fonction est linéaire).
Dans le cas d'une fonction constante, cette droite est parallèle à l'axe des abscisses.

Propriété

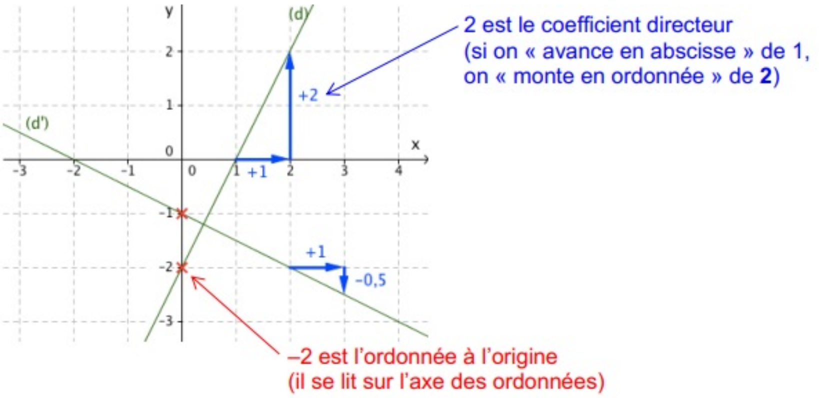
Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
Si $m > 0$, f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $m < 0$, f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Si $m = 0$, f est constante sur $\mathbb{R}$

Démonstration

Soient a et b deux nombres réels d'un intervalle I tel que $a < b$.
$f(b) - f(a) = mb + p - (ma + p) = mb + p - ma - p = m(b - a)$
Or $a < b$ donc $b - a > 0$
Donc $f(b) - f(a)$ est du signe de m.
Si $m > 0$ alors f conserve l'ordre et $f(b) - f(a) > 0$, $f(b) > f(a)$, f est donc croissante.
Si $m < 0$ alors f inverse l'ordre et $f(b) - f(a) < 0$, $f(b) < f(a)$, f est donc décroissante.
Si $m = 0$ alors $f(b) - f(a) = 0$ donc $f(b) = f(a)$, f est donc constante.

Exemples

Soient d et d' les droites représentatives des fonctions affines définies par :
(d) : $y = 2x - 2$
(d') : $y = -0,5x - 1$
Il est possible de tracer facilement une droite à partir de la donnée de son expression algébrique et à l'inverse, il est également facile de déterminer l'expression algébrique d'une droite à partir de sa représentation graphique.



Propriété

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points distincts de la droite (d) représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ alors :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Démonstration

Soit une fonction affine définie par $y = mx + p$ et $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$, deux points distincts de la droite représentative de cette fonction.
$y_B - y_A = (mx_B + p) - (mx_A + p) = m(x_B - x_A)$

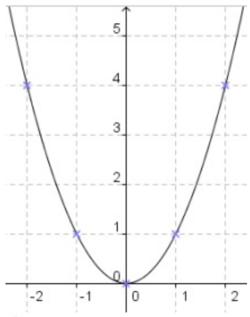
D'où $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

III Les fonctions de références

III.1 La fonction carrée

Propriété

La fonction carré f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$ et croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$



Sur $]-\infty;0]$ si $a<b$ alors $f(a)>f(b)$.
Sur $[0;+\infty[$ si $a<b$ alors $f(a)<f(b)$.

Démonstration

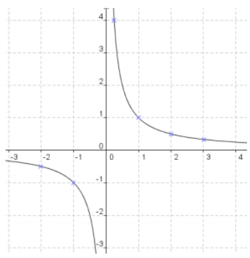
On pose : $f(x)=x^2$.
Soit a et b deux nombres réels quelconques positifs tels que $a<b$.
$f(b)-f(a)=b^2-a^2=(b-a)(b+a)$
Or $b-a>0$ et $a+b>0$ donc $f(b)-f(a)>0$
Finalement si $b>a\geq 0$ alors $f(b)>f(a)$ la fonction conserve l'ordre sur $[0;+\infty]$ elle est donc croissante sur cet intervalle.

La décroissance sur l'intervalle $]-\infty;0]$ est prouvée de la même façon en choisissant a et b deux nombres réels quelconques négatifs tels que $a<b$

III.2 La fonction inverse

Propriété

La fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$



La décroissance de la fonction inverse sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ permet d'écrire l'inégalité suivante pour a et b deux nombres réels de même signe :

$$a<b \Longleftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$$

Remarque

La variation d'une fonction ne peut s'étudier que sur un intervalle. On ne peut donc pas évoquer de décroissance sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ qui n'est pas un intervalle mais conclure de manière séparée que la fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

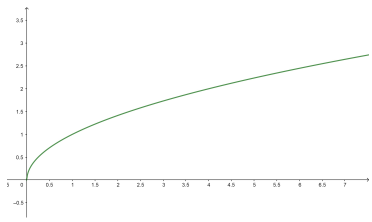
Démonstration

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$.
Soient a et b deux réels positifs avec $a < b$
$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$
$a - b < 0$ et $ab > 0$
On en déduit que $f(b) - f(a) < 0$
On peut donc conclure que f est décroissante sur $]0; +\infty[$
On prouve de la même façon la décroissance sur $]-\infty; 0[$ en prenant a et b deux réels négatifs avec $a < b$.

III.3 La fonction racine carrée

Propriété

La fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.



La croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$ permet d'écrire l'inégalité suivante pour a et b deux nombres réels positifs :

$$a < b \iff \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

Démonstration

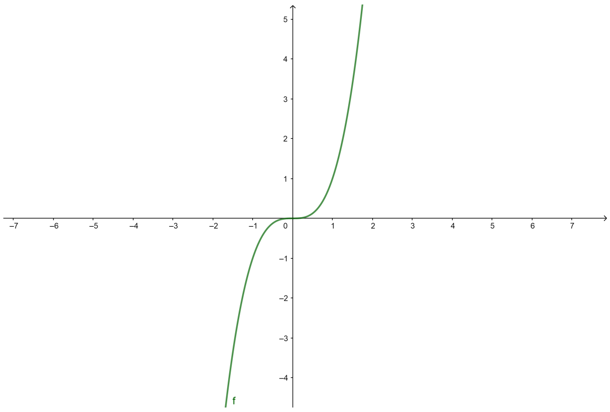
On pose $f(x) = \sqrt{x}$.
Soient a et b deux nombres réels positifs avec $a < b$.
$f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})\times(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b}^2-\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$
$a < b \iff b - a > 0$
On a donc finalement $b > a \iff f(b) > f(a)$

On a bien prouvé la croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$

III.4 La fonction cube

Propriété

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$



La croissance de la fonction cube sur $\mathbb{R}$ permet d'écrire l'inégalité suivante pour a et b deux nombres réels :

$$a < b \Longleftrightarrow a^3 < b^3$$