Version 250312

2024/2025

# Systèmes linéaires

## I Généralités sur les systèmes linéaires.

On appelle système linéaire tout système de $n$ équations linéaires à $p$ inconnues $(S)$ de la forme :

$$(S)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = y_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = y_n \end{cases}$$

- $(x_1;\ x_2; \dots;\ x_p)$ est appelé l'inconnu du système.
- $(y_1;\ y_2; \dots;\ y_n) \in \mathbb{R}^n$ est appelé le second membre du système.
- Les $a_{i,j}$ sont les coefficients du système avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.

Définition

- On dit qu'un système est carré lorsqu'il comporte le même nombre d'équations que d'inconnues.
- On dit qu'un système est homogène lorsque tous les termes du second membres sont nuls.

Remarque

**Exemple**

- $(S)\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ -5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 = -1 \end{cases}$ est un système carré.
- $(S)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$ est un système homogène.

- On appelle solution du système, tout $p$-uplet $(x_1;\ x_2; \dots;\ x_p) \in \mathbb{R}^p$ pour lequel les $n$ équations sont vérifiées.
- Deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

Définition

- On dit qu'un système est compatible s'il admet au moins une solution.
- On dit qu'un système est incompatible s'il n'admet pas de solution.
- On dit qu'un système est indéterminé s'il admet plusieurs solutions (éventuellement une infinité).

♣ Un système indéterminé est compatible.

♣ Un système homogène est compatible.

Remarque

**Exemple**

Résoudre les systèmes suivants :

a. $\begin{cases} 4x + y & = 7 \\ 3x - 2y & = 8 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 7x - 3y & = 6 \\ 4x - 2y & = 2 \end{cases}$ c. $\begin{cases} \sqrt{2}x + y & = 3 \\ 2x + \sqrt{2}y & = 3\sqrt{2} \end{cases}$ d. $\begin{cases} 1,4x - 2,1y & = -1,2 \\ 2x - 3y & = -5 \end{cases}$

# II Méthode du pivot de Gauss

## II.1 Opérations élémentaires

**Définition**

L'ensemble des solutions d'un système linéaire ne change pas si on effectue sur les équations les **opérations élémentaires** suivantes :

- Ajouter à une équation un multiple d'une autre équation $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j,\ i \neq j$.
- Échanger deux équations $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Multiplier une équation par un réel non nul $L_i \leftarrow \lambda L_i,\ \lambda \neq 0$.

**Propriété**

Toute suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes transforme un sytème linéaire en un système qui lui est équivalent.

**Exemple**

**Méthode du pivot de Gauss :**
L'idée de la méthode du pivot consiste à mettre le système sous forme triangulaire (système équivalent).

- On cherche une ligne faisant apparaître la première inconnue. Le coefficient apparaissant devant cette inconnue s'appelle le pivot.
- On fait un échange de lignes pour amener le pivot sur la première ligne.
- On fait disparaître la première inconnue des autres lignes à l'aide d'opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_1$.
- On recommence à partir de la deuxième ligne et de l'inconnue suivante qui apparaît encore dans les lignes suivantes.

Après application de la méthode du pivot de Gauss, on arrive alors à un système échelonné qui a la forme suivante :

$$(S) \begin{cases} a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + a'_{1,3}x_3 + \cdots + a'_{1,p}x_p = y'_1 \\ \qquad\quad a'_{2,2}x_2 + a'_{2,3}x_3 + \cdots + a'_{2,p}x_p = y'_2 \\ \qquad\qquad\qquad a'_{3,3}x_3 + \cdots + a'_{3,p}x_p = y'_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a'_{n,p}x_p = y'_n \end{cases}$$

Les coefficients $a'_{i,j}$ et $y'_i$ sont ceux obtenus à l'issue des opérations élémentaires.

**Exemple**

Résoudre le système suivant par la méthode du pivot de Gauss : $\begin{cases} x+2y+2z=3 \\ 2x+4y+5z=1 \\ x+3y+5z=0 \end{cases}$

En résumé, cet algorithme consiste à se servir du terme en $x$ dans la première équation pour éliminer les termes en $x$ dans les autres équations. Puis on se sert du terme en $y$ dans la deuxième équation pour éliminer les termes en $y$ dans les équations suivantes.
Et ainsi de suite. Une fois arrivé à un système échelonné en lignes, il suffit de remonter depuis la dernière équation pour en déduire de proche en proche les valeurs des autres inconnues.

Remarque

## II.2 Notation allégée

Dans la suite, on utilisera la notation allégée consistant à sous-entendre les inconnues et à placer les coefficients du système dans un tableau que l'on appelle des matrices.

Par exemple, le système : $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+3y+4z=5 \\ 6x+7y+8z=9 \end{cases}$ se note $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}\right)$

**Méthode du pivot de Gauss avec la notation allégée :**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 15 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il y a donc une infinité de solutions : $S=\{(-2+\lambda\ ;\ 3-2\lambda\ ;\ \lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.

**Exemple**

Un autre exemple : $\begin{cases} 3x_2-6x_3+6x_4+4x_5=-5 \\ 3x_1-7x_2+8x_3-5x_4+8x_5=9 \\ 3x_1-9x_2+12x_3-9x_4+6x_5=15 \end{cases}$ Montrer, en utilisant la notation allégée sous forme de matrice, que l'ensemble des solutions est
$S=\{(2\lambda-3\mu-24\ ;\ 2\lambda-2\mu-7\ ;\ \lambda\ ;\ \mu\ ;\ 7),\quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$.

## II.3 Nombre de solutions d'un système linéaire.

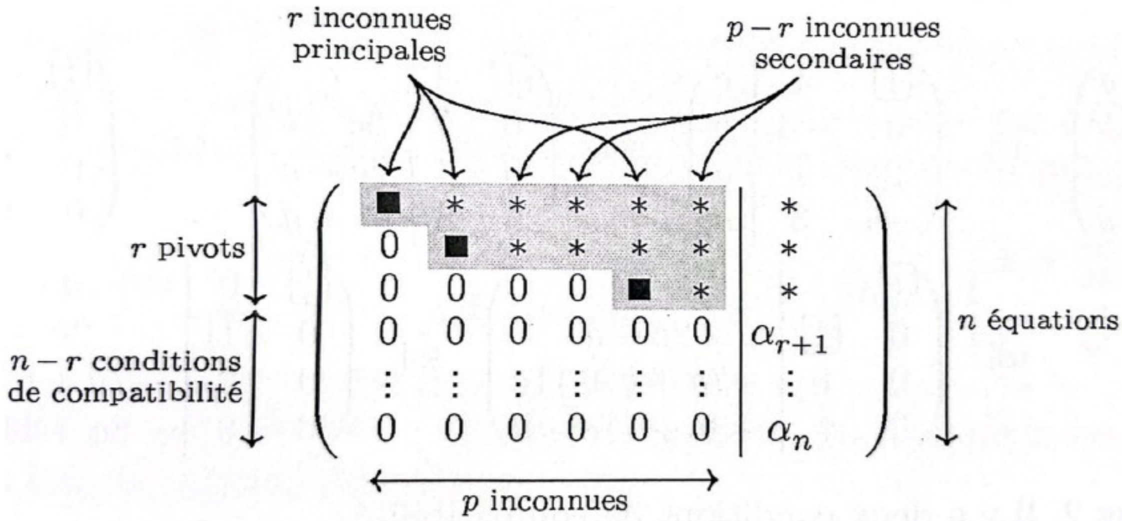
On considère le système linéaire suivant :

$$(S)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,p}x_p=y_1 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,p}x_p=y_2 \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\cdots+a_{n,p}x_p=y_n \end{cases}$$

En notation allégée :

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} & y_p \end{array}\right)$$

On commence par réduire le système sous une forme échelonné, par exemple :




Les carrés désignent les coefficients non nuls qui se trouvent en « tête de ligne » : ce sont les $r$ pivots. Les $(n-r)$ dernières équations sont de la forme $\alpha_i = 0$ : ce sont les $n-r$ conditions de compatibilités.

- Si l'un des coefficients $\alpha_i$ est non nul, alors le système est incompatible.
- Si tous les coefficients $\alpha_i$ sont nuls, alors le système est compatible.
  - Si le rang $r$ du système vaut $p$, alors il y a une unique solution.
  - Sinon, il y a une infinité de solutions. Les $r$ inconnues qui correspondent aux colonnes pivots (appelés inconnues principales) s'expriment alors en fonction des $p-r$ inconnues qui correspondent aux colonnes non pivots (appelées inconnues secondaires).

**Exemple**

a. Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2z - 2t = 2 \\ 3x + 3y - 3z + 9t = 12 \\ 4x + 4y - 2z + 11t = 12 \end{cases}$$

b. Discuter le nombre de solutions du système

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ 3x - 4y = b \\ x + y = c \\ -5x + 3y = d \end{cases}$$

avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

## III Systèmes carré d'ordre 2

On considère le système $(S)$ : $\begin{cases} ax+by=\alpha \\ cx+dy=\beta \end{cases}$ de notation allégée $\left(\begin{array}{cc|c} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \end{array}\right)$ avec $a,\ b,\ c,\ d,\ \alpha$ et $\beta$ des réels.

**Définition**

On appelle déterminant du système $(S)$ le réel :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

**Propriété**

**Formule de Cramer**

Le système $(S)$ admet une unique solution si, et seulement si, $\Delta \neq 0$.

**Remarque**

Si l'on raisonne en terme de vecteurs, si le déterminant est non nul, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Ils forment alors une base du plan ; tout vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

Le système $\begin{cases} ax+by=\alpha \\ cx+dy=\beta \end{cases}$ admet donc une unique solution qui sont les coefficients de la combinaison linéaire.

Si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ sont colinéaires ($\Delta = 0$), alors le système admet :

- Une infinité de solution si $\vec{w}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est dans la même direction que $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} d \\ b \end{pmatrix}$
- Aucune solution si $\vec{w}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ n'est pas dans la même direction que $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} d \\ b \end{pmatrix}$.

**Propriété**

Dans ce cas, l'unique couple solution est donné par $\left(\dfrac{\Delta_x}{\Delta}\ ;\ \dfrac{\Delta_y}{\Delta}\right)$ avec

$\Delta_x = \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$.

**Exemple**

Résoudre à l'aide des formules de Cramer les systèmes suivants.

a. $\begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y = 1 \\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)y = -1 \end{cases}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

c. $\begin{cases} (\alpha+1)x + (\alpha-1)y = 1 \\ (\alpha-1)x + (\alpha+1)y = -1 \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$