Version 220511

2021/2022

Système d'équation et droites

I Les méthodes de résolution

I.1 Par substitution

Exemple

Dans une pépinière, Martin achète deux lavandes et une vigne pour un total de 30,90 euros.
Lisa, quant à elle, achète 2 vignes et 3 lavandes pour un total de 53,80 euros.
Quel est le prix d'une lavande et d'une vigne ?

On note x le prix de la lavande et y le prix de la vigne.
On a alors le système d'équations suivant : $\begin{cases} 2x + y = 30,90 \\ 3x + 2y = 53,80 \end{cases}$
La méthode par substitution est particulièrement bien adaptée pour ce système car on peu facilement isoler une inconnue :
$\begin{cases} \mathbf{y = 30,90 - 2x} \\ 3x + 2\mathbf{y} = 53,80 \end{cases}$
$\begin{cases} \mathbf{y = 30,90 - 2x} \\ 3x + 2(\mathbf{30,90 - 2x}) = 53,80 \end{cases}$
$\begin{cases} y = 30,90 - 2x \\ 3x + 61,80 - 4x = 53,80 \end{cases}$
$\begin{cases} y = 30,90 - 2\mathbf{x} \\ \mathbf{x = 8} \end{cases}$
$\begin{cases} y = 30,90 - 2 \times \mathbf{8} = 14,90 \\ \mathbf{x = 8} \end{cases}$
$S = \{(8\,;\,14.90)\}$ Le prix de la lavande est donc de 8 euros et le prix de la vigne est de 14,90 euros.

I.2 Par combinaisons linéaires

Exemple

Quand il n'est pas possible ou difficile d'isoler une inconnue, on utilise ce que l'on appelle des combinaisons linéaires de ses équations. Nous allons utiliser cette méthode pour le système suivant :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \quad (l1) \\ 5x + 3y = 2 \quad (l2) \end{cases}$$

Nous allons chercher à éliminer x. Pour cela, on multiplie la ligne 1 par 5 et la ligne 2 par 3, de sorte à avoir le même nombre en facteur de x sur les deux lignes.

$$\begin{cases} 15x - 10y = 25 \quad (5 \times l1) \\ 15x + 9y = 6 \quad (3 \times l2) \end{cases}$$

Ensuite, nous allons soustraire les deux lignes.

$$\begin{cases} -19y = 19 \quad (5 \times l1 - 3 \times l2) \\ 15x + 9y = 6 \quad (3 \times l2) \end{cases}$$

Il est possible de faire $5 \times l1 - 3 \times l2$ ou $3 \times l2 - 5 \times l1$. Cependant il ne faut pas oublier de garder toujours deux équations ! Il faut toujours avoir autant d'équations que d'inconnues pour résoudre un système.

$$\begin{cases} y = -1 \\ 15x + 9 \times -1 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$S = \{(1, -1)\}$

II Lien avec les droites.

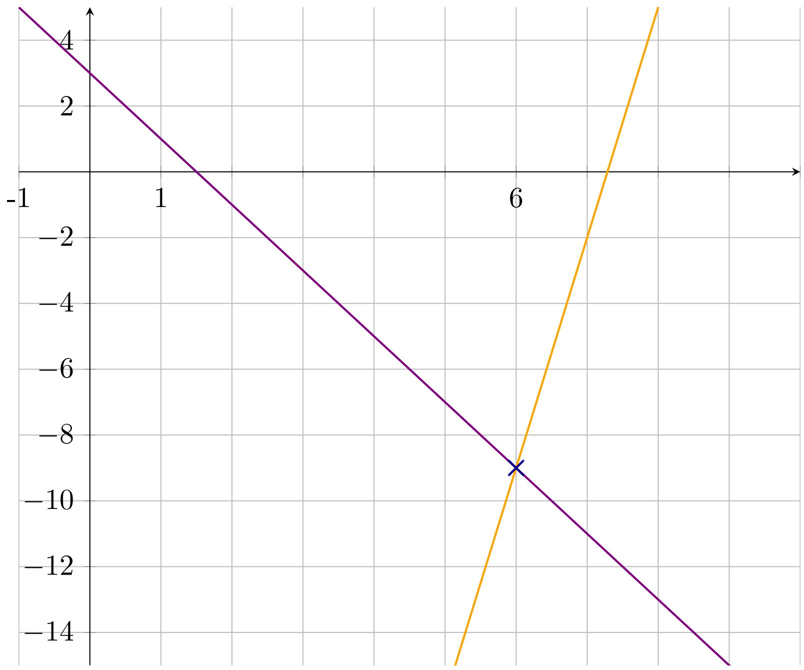
Exemple

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ 7x-y=51 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=3-2x \\ y=7x-51 \end{cases}$$

On reconnaît ici deux expressions de fonctions affines, autrement dit les **équations réduites** de deux droites.
Voici les représentations graphiques de ses droites :



La solution du système, c'est à dire le point dont les coordonnées vérifient à la fois les deux équations réduites, est le point d'intersection des droites. Ici $M\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Définition

Soit le système suivant :
$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+by'=c' \end{cases}$$
Avec a, a', b, b', c et c' des réels.
Résoudre le système c'est trouver tous les couples $(x;y)$ de nombres réels vérifiant simultanément les deux équations du système.

Remarque

Si b et b' sont non nuls, le système de la définition précédente peut s'écrire de la façon suivante :
$\begin{cases} y = \frac{a}{b} \times x + \frac{c}{b} \\ y = \frac{a'}{b'} \times x + \frac{c'}{b'} \end{cases}$

- Si les deux droites correspondantes ne sont pas parallèles, c'est à dire si $\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$, alors la solution est unique et est le point d'intersection des droites.
- Si les deux droites sont correspondantes sont parallèles, c'est à dire si $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, alors il n'existe aucune solution au système.
- Si les droites sont confondues, c'est à dire que leurs équations cartésiennes une fois réduites sont identiques, alors il y a une infinité de solutions.

Exemple

- Exemple n°1
  Soit le système suivant :
  $\begin{cases} -3x + y = 1 \\ 6x - 2y = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 + 3x \\ 2y = 6x - 6 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 + 3x \\ y = \frac{6}{2}x - \frac{6}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 + 3x \\ y = 3x - 3 \end{cases}$
  Si l'on poursuit en isolant y on obtient : $1 + 3x = 3x - 3$ et donc $-3 = 1$ ce qui est une contradiction. (On aurait déjà pu conclure en remarquant que les coefficients directeurs étaient égaux).
  Il n'y a donc pas de solution au système précédent et les deux droites sont parallèles.
- Exemple n°2 Soit le système suivant :
  $\begin{cases} -6x - 3y = -6 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y = -6x + 6 \\ y = 2 - 2x \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = 2 - 2x \end{cases}$
  Les deux droites sont confondues, il existe donc une infinité de solutions au système.