

# SUITES NUMÉRIQUES

**Archimède** est avec **Euclide** le plus grand mathématicien de l'Antiquité. Il vivait à Syracuse en Sicile. Sa découverte du principe ou de la poussée d'Archimède est souvent racontée de façon romancée. On sait moins qu'il fut le premier à utiliser des suites convergentes. Pour calculer une valeur approchée du nombre  $\pi$  il inscrit et circonscrit au cercle des polygones ayant de plus en plus de côtés, jusqu'à 96. Il calcule de même l'aire englobée par un arc de parabole et fait converger une suite géométrique pour obtenir le résultat.

## I Généralités sur les suites de nombres réels

Une suite  $u$  est une fonction définie sur  $\mathbb{N}$  qui à tout entier naturel associe le réel  $u(n)$ , noté  $u_n$ . Cette suite se note  $u$ ,  $(u_n)$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(u_n)_{n \geq 0}$

Vocabulaire :  $u_n$  est appelé le **terme général** de la suite  $(u_n)$  ou le terme de rang  $n$  (d'indice  $n$ ).  $u_0$  est appelé le terme initial de la suite  $(u_n)$ .

Définition

- Lorsqu'une suite est donnée par son terme général  $u_n$  exprimé en fonction de  $n$  indépendamment des termes précédents, on dit que la suite est définie sous **forme explicite**.
- Lorsqu'une suite est donnée par son premier terme et une relation exprimant chaque terme en fonction du précédent, on dit que la suite est définie par une **relation de récurrence**.

Définition

## II Suites classiques

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels. On dit que :

- $u$  est **arithmétique** s'il existe  $r \in \mathbb{R}$ , appelé raison, tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$
- $u$  est **géométrique** s'il existe  $q \in \mathbb{R}$ , appelé raison, tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$
- $u$  est **arithmético-géométrique** s'il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , appelé raison, tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$

Définition

Les suites arithmétiques et géométriques sont des cas particuliers de suites arithmético-géométriques.

Remarque

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels.

- Si  $u$  est la suite arithmétique de premier terme  $u_0$  et de raison  $r$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$ .
- Si  $u$  est la suite géométrique de premier terme  $u_0$  et de raison  $q$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$ .

Propriété

**Somme des premiers termes d'une suite géométrique** : soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q \neq 1$ , alors pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ .

**Exercice 1 :**

Démontrer la propriété précédente

**Exercice 2 :**

Calculer les sommes ci-dessous :

a.  $S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{13}$

b.  $S = 4 + 16 + \dots + 256$

### III Généralités et limite d'une suite

Une suite monotone est une suite croissante ou décroissante :

- $u$  est croissante si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$
- $u$  est décroissante si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$

**Exemple**

Etudier la monotonie des suites suivantes :

- $u_{n+1} = u_n - 2$  avec  $u_0 = 34$
- $u_n = \frac{1+n}{2+n}$  (utiliser la fonction associée)
- $u_n = 0.5 \times 0.2^n$
- $u_{n+1} = 2u_n - 7$  avec  $u_0 = 10$  (utiliser un raisonnement par récurrence).

Soit  $(u_n)$  une suite de réels définie sur  $\mathbb{N}$ .

- $u$  est majorée :  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
- $u$  est minorée :  $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$
- $u$  est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

**Exemple**

La suite  $(u_n)$  est définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_{n+1} = \sqrt{3 - u_n}$  et  $u_0 = 1$ . En calculant les premiers termes de cette suite à la calculatrice, conjecturer l'existence d'un minorant et d'un majorant pour la suite. Démontrer votre conjecture en utilisant un raisonnement par récurrence.

Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels définie sur  $\mathbb{N}$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ . On dit que

- $(u_n)$  **admet  $\ell$  pour limite**, et on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ , si tout intervalle ouvert centré sur  $\ell$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang.
- $(u_n)$  **admet  $+\infty$  pour limite**, et on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , si tout intervalle ouvert de la forme  $]A; +\infty[$  (avec  $A \in \mathbb{R}$ ) contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang.
- $(u_n)$  **admet  $-\infty$  pour limite**, et on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ , si tout intervalle ouvert de la forme  $] -\infty; A[$  (avec  $A \in \mathbb{R}$ ) contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang.

Lorsqu'elle existe, la limite de la suite  $(u_n)$  est **unique**.

Lorsque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  avec  $\ell \in \mathbb{R}$ , on dit que la suite **converge** vers  $\ell$ .

Lorsque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$ , on dit que la suite **diverge** vers  $\pm\infty$ .

Une suite qui n'admet aucune limite est une suite divergente. Par exemple,  $u_n = (-1)^n$  diverge.

### Exemple

Dire intuitivement, si les suites ci-dessous sont convergentes ou divergentes, préciser leur limite :

a.  $u_n = n^2$

c.  $u_n = \frac{1}{n}$

e.  $u_n = \sqrt{n-2}$

b.  $u_n = n$

d.  $u_n = \frac{1}{n} + 3$

f.  $u_n = \frac{n}{\sqrt{n}}$

## IV Opérations sur les limites

### Somme de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n$

Soit  $\ell$ , la limite de la suite  $(u_n)$ , et  $\ell'$  la limite de la suite  $(v_n)$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell' = +\infty$	$\ell' = -\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	<b>FI</b>
$\ell = -\infty$	$-\infty$	<b>FI</b>	$-\infty$

### Produit de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n$

Soit  $\ell$ , la limite de la suite  $(u_n)$ , et  $\ell'$  la limite de la suite  $(v_n)$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$	$\ell' = 0$	$\ell' = \pm\infty$
$\ell \in \mathbb{R}^*$	$\ell \times \ell'$	0	$\pm\infty$
$\ell = 0$	0	0	<b>FI</b>
$\ell = \pm\infty$	$\pm\infty$	<b>FI</b>	$\pm\infty$

### Quotient de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n}$

Soit  $\ell$ , la limite de la suite  $(u_n)$ , et  $\ell'$  la limite de la suite  $(v_n)$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$	$\ell' = 0$	$\ell' = \pm\infty$
$\ell \in \mathbb{R}^*$	$\frac{\ell'}{\ell}$	0	$\pm\infty$
$\ell = \pm\infty$	0	0	<b>FI</b>
$\ell = 0$	$\pm\infty$	<b>FI</b>	$\pm\infty$

**FI** est une forme indéterminée.

$\pm\infty$  se détermine à l'aide de la règle des signes.

## Exemple

### Exercice 1

Donner les limites suivantes :

a.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + n$

b.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left( \frac{1}{\sqrt{n}} + 1 \right)$

c.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{-n^2 - 3}$

### Exercice 2

Donner les limites suivantes **méthodes à retenir par la suite** :

a.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1$

b.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 9n + 1}{2n^3 + n - 1}$

c.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

## V Limites et comparaison

Théorème

**Passage à la limite dans une inégalité** : Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites admettant des limites.

- Si  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  alors  $u_n < v_n$  à partir d'un certain rang.

Théorème

**Théorème de comparaison** : Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites de réels telles qu'à partir d'un certain rang  $N$ , on ait  $u_n \leq v_n$ .

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

♥ Démonstration

On suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  et on montre que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  il existe un entier  $N'$  tel que pour tout  $n \geq N'$ ,  $u_n > A$ .

On pose  $n_0 = \max\{N, N'\}$  et on considère un entier  $n \geq n_0$ , on a donc :

$$v_n \geq u_n$$

$$u_n \geq A$$

$$v_n \geq u_n \geq A$$

Ainsi l'intervalle ouvert  $]A; +\infty[$  contient toutes les valeurs  $v_n$  à partir d'un certain rang, quel que soit  $A \in \mathbb{R}$ . On a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

On montre de même l'autre point.

Théorème

**Théorème d'encadrement ou « des gendarmes »** : Soit  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites de réels telles qu'à partir d'un certain rang  $N$ , on ait  $u_n \leq v_n \leq w_n$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$

Soit l'intervalle ouvert  $I = ]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$  avec  $\epsilon > 0$ .

- Soit  $n_1 \in \mathbb{N}$  l'entier à partir duquel  $\forall n > n_1, u_n \in I$ .
- Soit  $n_2 \in \mathbb{N}$  l'entier à partir duquel  $\forall n > n_2, w_n \in I$ .
- Soit  $n_3 \in \mathbb{N}$  l'entier à partir duquel  $\forall n > n_3, u_n \leq v_n \leq w_n$ .

Soit  $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ . A partir du rang  $n_0$ , on a donc  $u_n \in I, w_n \in I$  et  $u_n \leq v_n \leq w_n$ .  
D'où  $v_n \in I$ .

$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, v_n \in ]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ . Finalement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$

### Exemple

A l'aide des théorèmes précédents, déterminer les limites suivantes :

a.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + (-1)^n$

b.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin(n)}{n}$

**Théorème de convergence monotone :** soit  $(u_n)$  une suite de réels définie sur  $\mathbb{N}$ .

- Si  $(u_n)$  est croissante et majorée alors elle converge.
- Si  $(u_n)$  est décroissante et minorée alors elle converge.

Soit  $(u_n)$  une suite de réels définie sur  $\mathbb{N}$ .

- Si  $(u_n)$  est croissante et non majorée alors elle diverge.
- Si  $(u_n)$  est décroissante et non minorée alors elle diverge.

- Soit  $(u_n)$  une suite croissante et non majorée.

Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Comme  $(u_n)$  est non majorée, il existe un entier  $n_0$  tel que  $\forall n \geq n_0, u_n \geq A$ .  
Ainsi, pour tout réel  $A$ , l'intervalle ouvert  $]A; +\infty[$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang  $n_0$ .

D'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

- Soit  $(u_n)$  une suite décroissante et non minorée. Alors la suite  $(-u_n)$  est croissante et non majorée. D'après la première partie,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -u_n = +\infty$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Soit  $(u_n)$  une suite de réels définie sur  $\mathbb{N}$ .

- Si  $(u_n)$  est croissante et admet pour limite  $\ell$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell$
- Si  $(u_n)$  est décroissante et admet pour limite  $\ell$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n \geq \ell$

Nous allons démontrer ce théorème par l'absurde en supposant le contraire :  $\exists \rho \in \mathbb{N}, u_\rho > \ell$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  donc  $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n > n_\epsilon, \ell - \epsilon \leq u_n \leq \ell + \epsilon$ .

On pose  $\epsilon = u_\rho - \ell$ . Donc  $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n > n_\epsilon, 2\ell - u_\rho \leq u_n \leq u_\rho$

On a donc en particulier :  $\forall n > n_\epsilon, u_n \leq u_\rho$

Or la suite  $(u_n)$  est croissante, donc  $\forall n > \rho, u_n > u_\rho$ .

Ceci est une contradiction, on en déduit donc que l'hypothèse de départ est fautive.

## VI Limites des suites géométriques

Théorème

**Limite d'une suite géométrique :** Soit la suite  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q \in \mathbb{R}$  et de premier terme  $u_0$  :

- Si  $q > 1$  alors la suite  $(u_n)$  diverge vers  $u_0 \times \infty$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0 \times \infty$
- Si  $q = 1$  alors la suite  $(u_n)$  est constante et égale à  $u_0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$
- Si  $-1 < q < 1$  alors la suite  $(u_n)$  converge vers 0 :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
- Si  $q \leq -1$  la suite  $(u_n)$  n'admet pas de limite.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin de l'inégalité de Bernouilli : soit un nombre  $a$  positif

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1 + a)^n \geq 1 + na$$

Étudions le comportement d'une suite géométrique de raison  $q$  :

- Supposons  $q > 1$ . On pose  $q - 1 = a$  de sorte que  $q = 1 + a$ . On a donc :

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \iff q^n \geq 1 + na$$

Or  $a > 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + na = +\infty$ . D'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ .

- Supposons  $0 < q < 1$ . On pose  $q' = \frac{1}{q} > 1$  et on étudie la suite de raison  $q'$ . D'après le cas précédent, comme  $q' > 1$ , la suite diverge vers  $+\infty$ . Donc d'après les règles d'opérations sur les limites  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Les cas  $q = 0$  et  $q = 1$  sont des cas de suites constantes dont les limites sont évidentes.
- Le cas  $q = -1$  correspond à une suite dont les valeurs alternent entre 1 et -1. La suite n'a donc aucune limite.
- Supposons  $q < -1$ . Alors  $q^{2n} = (q^2)^n$  est une suite de raison  $q^2 > 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{2n} = +\infty$ .  
 $q \times q^{2n} = q^{2n+1} < 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{2n+1} = -\infty$ .  
 La suite  $(q^n)$  n'admet donc aucune limite.

Démonstration

### Exemple

Donner la limites des suites ci-dessous :

a.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n$

c.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 0,5^n)$

e.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$

b.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

d.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3}$

f.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1^n + 7$

Théorème

**Somme des termes d'une suite géométrique :** soit la suite  $(u_n)$  une suite géométrique de raison strictement positive  $q$  vérifiant  $0 < q < 1$ . Alors la somme des  $n$  premiers termes de la suite tend vers une limite finie lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = \frac{u_0}{1 - q}$$

**Algorithme de seuil :**

- a. Montrer que la suite  $(u_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_{n+1} = 4u_n$  avec  $u_0 = 2$  est monotone.
- b. Quelle est la nature de la suite  $(u_n)$ ? Donner alors sa forme explicite.
- c. La suite  $(u_n)$  est-elle convergente ou divergente?
- d. Écrire un algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel la suite  $(u_n)$  de limite infinie est supérieure à un nombre réel  $A$ .