



SUITES NUMÉRIQUES

Archimède est avec **Euclide** le plus grand mathématicien de l'Antiquité. Il vivait à Syracuse en Sicile. Sa découverte du principe ou de la poussée d'Archimède est souvent racontée de façon romancée. On sait moins qu'il fut le premier à utiliser des suites convergentes. Pour calculer une valeur approchée du nombre π il inscrit et circonscrit au cercle des polygones ayant de plus en plus de côtés, jusqu'à 96. Il calcule de même l'aire englobée par un arc de parabole et fait converger une suite géométrique pour obtenir le résultat.

I Généralités sur les suites de nombres réels

Une suite u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ qui à tout entier naturel associe le réel $u(n)$, noté u_n . Cette suite se note u , (u_n) , $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n \geq 0}$.

Vocabulaire : u_n est appelé le **terme général** de la suite (u_n) ou le terme de rang n (d'indice n). u_0 est appelé le terme initial de la suite (u_n) .

Définition

- Lorsqu'une suite est donnée par son terme général u_n exprimé en fonction de n indépendamment des termes précédents, on dit que la suite est définie sous **forme explicite**.
- Lorsqu'une suite est donnée par son premier terme et une relation exprimant chaque terme en fonction du précédent, on dit que la suite est définie par une **relation de récurrence**.

Définition

II Suites classiques

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que :

- u est **arithmétique** s'il existe $r \in \mathbb{R}$, appelé raison, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$
- u est **géométrique** s'il existe $q \in \mathbb{R}$, appelé raison, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$
- u est **arithmético-géométrique** s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, appelé raison, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$

Définition

Les suites arithmétiques et géométriques sont des cas particuliers de suites arithmético-géométriques.

Remarque

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

- Si u est la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r , alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
- Si u est la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q , alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

Propriété

Somme des premiers termes d'une suite géométrique : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Exercice 1 :

Démontrer la propriété précédente

Exercice 2 :

Calculer les sommes ci-dessous :

a. $S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{13}$

b. $S = 4 + 16 + \dots + 256$

Étant donnée une fonction $f : I \rightarrow I$ définie et à valeurs dans un même intervalle I , et $a \in I$, il existe une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, unique, telle que $u_0 = a$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

De plus, $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de I . la fonction f est appelée la **fonction itératrice**.

III Généralités et limite d'une suite

Une suite monotone est une suite croissante ou décroissante :

- u est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$
- u est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$

Exemple

Étudier la monotonie des suites suivantes :

• $u_{n+1} = u_n - 2$ avec $u_0 = 34$

• $u_n = 0.5 \times 0.2^n$

Soit (u_n) une suite de nombres réels définie sur $\mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que

- (u_n) **admet ℓ pour limite**, et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, si tout intervalle ouvert centré sur ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
- (u_n) **admet $+\infty$ pour limite**, et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ (avec $A \in \mathbb{R}$) contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
- (u_n) **admet $-\infty$ pour limite**, et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, si tout intervalle ouvert de la forme $] -\infty; A[$ (avec $A \in \mathbb{R}$) contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Lorsqu'elle existe, la limite de la suite (u_n) est **unique**.

Lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que la suite **converge** vers ℓ .

Lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$, on dit que la suite **diverge** vers $\pm\infty$.

Une suite qui n'admet aucune limite est une suite divergente. Par exemple, $u_n = (-1)^n$ diverge.

Exemple

Dire intuitivement, si les suites ci-dessous sont convergentes ou divergentes, préciser leur limite :

a. $u_n = n^2$

c. $u_n = \frac{1}{n}$

e. $u_n = \sqrt{n-2}$

b. $u_n = n$

d. $u_n = \frac{1}{n} + 3$

f. $u_n = \frac{n}{\sqrt{n}}$

Algorithme de seuil :

Écrire un algorithme permettant de déterminer le rang à partir duquel la suite (u_n) définie par récurrence par $u_{n+1} = 4u_n$, de limite infinie, est supérieure à un nombre réel A donné par l'utilisateur.

IV Opérations sur les limites

Dans ce qui suit, **FI** est une forme indéterminée.

$\pm\infty$ se détermine à l'aide de la règle des signes.

Somme de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n$ Soit ℓ , la limite de la suite (u_n) , et ℓ' la limite de la suite (v_n) .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell' = +\infty$	$\ell' = -\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$\ell = -\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

Théorème

Produit de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n$ Soit ℓ , la limite de la suite (u_n) , et ℓ' la limite de la suite (v_n) .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$	$\ell' = 0$	$\ell' = \pm\infty$
$\ell \in \mathbb{R}^*$	$\ell \times \ell'$	0	$\pm\infty$
$\ell = 0$	0	0	FI
$\ell = \pm\infty$	$\pm\infty$	FI	$\pm\infty$

Théorème

Quotient de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n}$ Soit ℓ , la limite de la suite (u_n) , et ℓ' la limite de la suite (v_n) .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n}$ \ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$	$\ell' = 0$	$\ell' = \pm\infty$
$\ell \in \mathbb{R}^*$	$\frac{\ell'}{\ell}$	0	$\pm\infty$
$\ell = \pm\infty$	0	0	FI
$\ell = 0$	$\pm\infty$	FI	$\pm\infty$

Exemple

Exercice 1

Donner les limites suivantes :

a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + n$

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1 \right)$

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{-n^2 - 3}$

Exercice 2

Donner les limites suivantes (**non exigible**) :

a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1$

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 9n + 1}{2n^3 + n - 1}$

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

V Limites et comparaison

Passage à la limite dans une inégalité : Soient (u_n) et (v_n) deux suites admettant des limites.

- Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ alors $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang.

Théorème de comparaison : Soit (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles qu'à partir d'un certain rang N , on ait $u_n \leq v_n$.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et on montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ il existe un entier N' tel que pour tout $n \geq N'$, $u_n > A$.

On pose $n_0 = \max\{N, N'\}$ et on considère un entier $n \geq n_0$, on a donc :

$$v_n \geq u_n$$

$$u_n \geq A$$

$$v_n \geq u_n \geq A$$

Ainsi l'intervalle ouvert $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs v_n à partir d'un certain rang, quel que soit $A \in \mathbb{R}$. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

On montre de même l'autre point.

Théorème d'encadrement ou « des gendarmes » : Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites de réels telles qu'à partir d'un certain rang N , on ait $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$

Soit l'intervalle ouvert $I =]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ avec $\epsilon > 0$.

- Soit $n_1 \in \mathbb{N}$ l'entier à partir duquel $\forall n > n_1, u_n \in I$.
- Soit $n_2 \in \mathbb{N}$ l'entier à partir duquel $\forall n > n_2, w_n \in I$.
- Soit $n_3 \in \mathbb{N}$ l'entier à partir duquel $\forall n > n_3, u_n \leq v_n \leq w_n$.

Soit $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. A partir du rang n_0 , on a donc $u_n \in I$, $w_n \in I$ et $u_n \leq v_n \leq w_n$. D'où $v_n \in I$.

$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, v_n \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$. Finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$

Exemple

A l'aide des théorèmes précédents, déterminer les limites suivantes :

a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + (-1)^n$

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin(n)}{n}$