Version 220124

2021/2022

Vecteurs et repérage

I Repère du plan

Soient trois points O, I, et J non alignés. Ils forment un repère du plan (O, I, J) tel que :

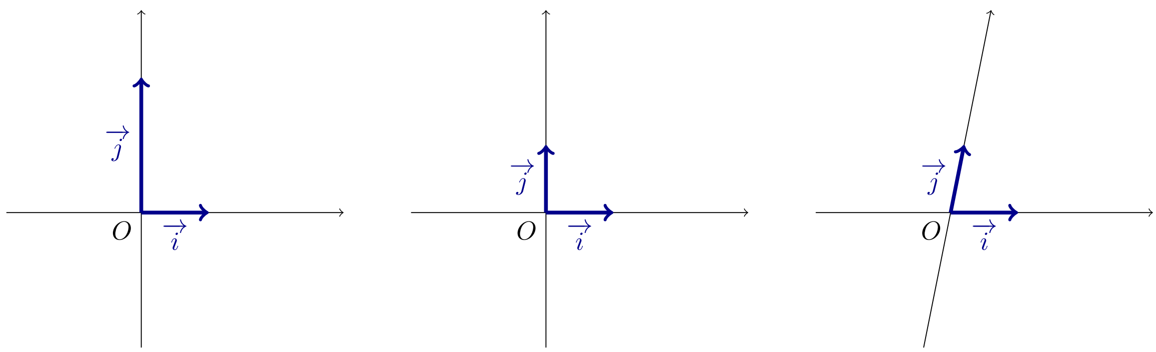
- O se nomme l'origine du repère
- (OI) est l'axe des abscisses
- (OJ) est l'axe des ordonnées

Définition

Repère du plan
On appelle repère du plan tout triplet $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où O est un point et $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires.

Repère orthogonal
Un repère est dit orthogonal si $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ ont des directions perpendiculaires.

Repère orthonormé
Un repère est dit orthonormé s'il est orthogonal et si $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont de norme 1.

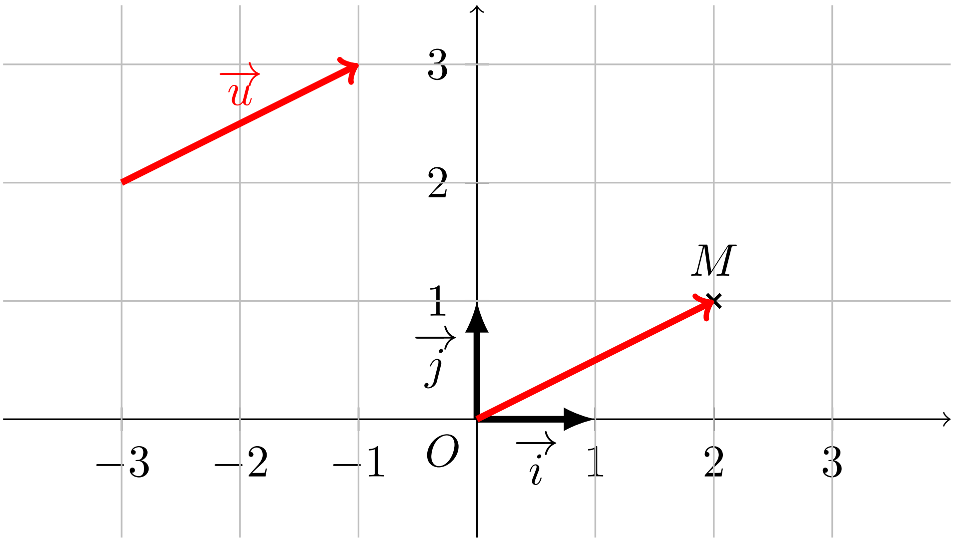


II Coordonnées d'un vecteur

Définition

Coordonnées d'un vecteur
Soit M un point quelconque d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et un vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ sont les coordonnées du point M.

On note : $\overrightarrow{u}(x, y)$ ou $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Remarque

Si $\vec{u}$ a pour coordonées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $-\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ dans un repère.

Propriétés

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et un réel k :

- $\vec{u} = \vec{v} \iff x = x'$ et $y = y'$
- Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Soient A et B deux points de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans un repère $O(, \vec{i}, \vec{j})$:

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_B \end{pmatrix}$.

Démonstration

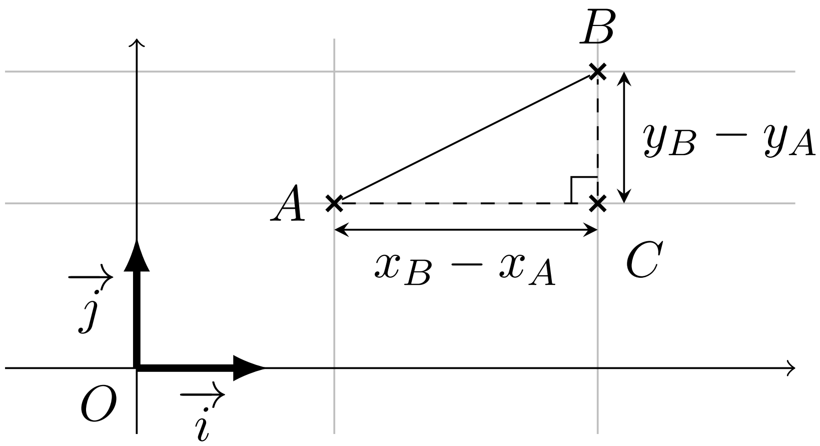
Montrons $\overrightarrow{AB}$ que a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_B \end{pmatrix}$:

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

Comme $-\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} -x_A \\ -y_A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$

Alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

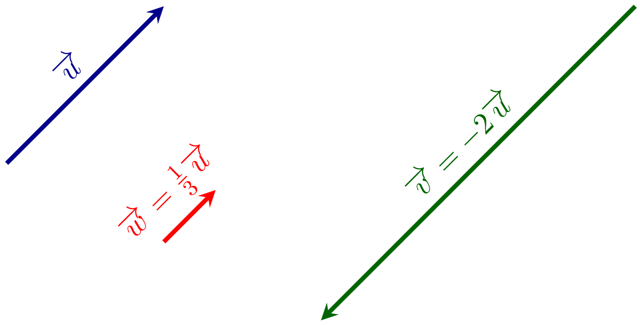


III Colinéarité de deux vecteurs

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles soit : $\vec{u} = k\vec{v}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$.



Démonstration

Si l'un des vecteurs est nul alors l'équivalence est évidente.
Par exemple $\vec{u} = \vec{0}$ alors $0y' - 0x' = 0$

$\Longrightarrow$ Supposons maintenant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient non nuls :
Dire que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
Les coordonnées des vecteurs et sont donc proportionnelles et le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité :

x	x'
y	y'

Donc : $xy' = yx'$ soit encore $xy' - yx' = 0$.

$\Longleftarrow$ Réciproquement, si $xy' - yx' = 0$.
Le vecteur $\vec{v}$ étant non nul, l'une de ses coordonnées est non nulle.

- Supposons que $x' \neq 0$. Posons alors $k = \frac{x}{x'}$. L'égalité $xy' - yx' = 0$ s'écrit : $yx' = xy'$.
  Soit : $y = \frac{xy'}{x'} = ky'$
  Comme on a déjà $y = kx'$, on en déduit que $\vec{u} = k\vec{v}$.
- Si $x' = 0$, alors $y' \neq 0$, et on peut suivre le même raisonnement avec $k = \frac{y}{y'}$.

Définition

Déterminant

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Le nombre $xy' - yx'$ est appelé déterminant des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

On note : $det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

Par conséquence direct de la propriété démontrée page 3 :

Propriété

Dire que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires revient à dire que :

$$det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$$

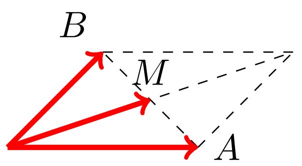
IV Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété

Soient A et B deux points de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $(\frac{1}{2}(x_A + x_B); \frac{1}{2}(y_A + y_B))$

Démonstration

Considérons le parallélogramme construit à partir de O, A et B.
Soit M le point d'intersection des diagonales.



Alors $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ (Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu). $\overrightarrow{OM}$ (ou M) a donc les mêmes coordonnées que celles du vecteur $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, soit :
$(\frac{1}{2}(x_A + x_B); \frac{1}{2}(y_A + y_B))$

V Distance dans un repère orthonormé

La propriété suivante découle du théorème de Pythagore :

Propriété

Soient A et B deux points de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans un repère **orthonormé** $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, alors : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.