2024/2025

Rep. paramétriques/eq. cartésienne

René Descartes (1596-1650) reste célèbre pour avoir défini dans son livre *Le discours de la méthode* publié en 1637 la démarche que doit adopter le scientifique dans ses recherches, en particulier reconnaître comme vrai que ce qui est effectivement démontré et opérer une résolution systématique des problèmes grâce à une analyse par étapes successives. Son texte est suivi de trois appendices dans lesquels il applique ces principes. Dans l'un d'entre eux, *La géométrie*, il introduit les coordonnées pour traiter les problèmes de géométrie qui se ramènent alors à des résolutions d'équations. C'est ce que l'on nomme la géométrie analytique.

I Représentations paramétriques et équations cartésiennes

L'espace est muni d'un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ orthonormé.

I.1 Représentation paramétrique d'une droite

Théorème

Représentation paramétrique d'une droite
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$. Pour tout point $M(x; y; z)$ de l'espace, on a l'équivalence.

$$M \in \mathcal{D} \iff \text{il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x &= x_A + at \\ y &= y_A + bt \\ z &= z_A + ct \end{cases}$$

Démonstration

$M \in \mathcal{D}$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$$
$$\iff \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} x - x_A &= at \\ y - y_A &= bt \\ z - z_A &= ct \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x &= x_A + at \\ y &= y_A + bt \\ z &= z_A + ct \end{cases}$$

Remarque

- On dit que le système $\begin{cases} x &= x_A + at \\ y &= y_A + bt \\ z &= z_A + ct \end{cases}$ est un système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$ ou simplement représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.
- Il existe une infinité de systèmes d'équations paramétriques pour une droite car une droite est caractérisée par n'importe lequel de ses points et un vecteur directeur quelconque.

Théorème

Soit (S) le système $\begin{cases} x &= \alpha + at \\ y &= \beta + bt \\ z &= \gamma + ct \end{cases}$ où $a,\ b$ et c ne sont pas tous nuls.
Lorsque t décrit $\mathbb{R}$, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ dont les coordonnées vérifient (S) est la droite passant par $A(\alpha,\beta,\gamma)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(a,b,c)$.

Exemple

Donner la représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$, passant par le point $A(-1;2;5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Exemple

Soit $A(2;3;-1)$ et $B(1;-3;2)$ Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$.

I.2 Équation cartésienne d'un plan.

Théorème

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(x_A,y_A,z_A)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a;b;c)$. Pour tout point $M(x;y;z)$ de l'espace, on a l'équivalence

$$M \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

Théorème

Si $\mathcal{P}$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(a;b;c)$ alors $\mathcal{P}$ à une équation cartésienne de la forme

$$(E)\quad ax+by+cz+d=0 \quad \text{où } a,\ b \text{ et } c \text{ ne sont pas tous nuls.}$$

Inversement, si les réels $a,\ b$ et c ne sont pas tous nuls, l'ensemble des points M de coordonnées $(x;y;z)$ vérifient (E) est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(a;b;c)$.

Soit un point $A(x_A;y_A;z_A)$ de $\mathcal{P}$.

$$\begin{aligned}M(x;y;z)\in\mathcal{P} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{n} \text{ sont orthogonaux}\\ &\iff \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0\\ &\iff a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0\\ &\iff ax+by+cz+d=0\end{aligned}$$

Avec $d=ax_0+by_0+cz_0$
Réciproquement, supposons par exemple que $a\neq 0$ (a, b et c sont non tous nuls).
On note (E) l'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant l'équation $ax+by+cz+d=0$. Alors le point $A(-\frac{d}{a};0;0)$ vérifie l'équation et donc $A\in E$.

Soit un vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. Pour tout point $M(x;y;z)$, on a :

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=a(x+\frac{d}{a})+b(y-0)+c(z-0)=ax+by+cz+d=0$ car $M\in(E)$
Donc l'ensemble E est le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

Démonstration

Exemple

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $x+2y-5z+6=0$.
Donner les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Exemple

Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(-1;2;1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$.

Deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Propriété

Exemple

Dans un repère orthonormé, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont pour équations respectives :
$2x+4y+4z-3=0$ et $2x-5y+4z-1=0$
Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires.

Exemple

Dans un repère orthonormé, le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $2x-y+3z-2=0$.
Soit $A(1;2;-3)$ et $B(-1;2;0)$.

a. Démontrer que la droite (AB) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.
b. Déterminer leur point d'intersection.

Exemple

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1;0;2)$, $B(-1;2;1)$ et $C(0;1;-2)$.
Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

Exemple

Dans un repère orthonormé, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont pour équations respectives : $-x+2y+z-5=0$ et $2x-y+3z-1=0$.

a. Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants.

b. Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection $\mathcal{D}$.