Primitives

Inverse de la notion de dérivée, celle de primitive a joué un rôle essentiel dans le développement du calcul différentiel et intégral. En sciences physiques, la vitesse est la dérivée de l'équation du mouvement et une primitive de son accélération. Aussi des relation entre ces trois données débouchent sur les équations différentielles, d'où leur importance, mais aussi leur difficulté car aucune théorie générale n'existe.

I Notion de primitive d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f sur I, une fonction F tel que $F' = f$.

Exemple

On considère les fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 4x + 1 \end{array} \qquad F : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x^2 + x + 1 \end{array}$$

Montrer que f est la fonction dérivée de la fonction F.
F est donc une **primitive** de f.

Propriété

Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration

Soit F et G deux primitives de la fonction f sur I.
Alors : $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$.
Donc : $F'(x) = G'(x) \iff F'(x) - G'(x) = 0$, soit encore $(F - G)'(x) = 0$
La fonction $F - G$ possède une dérivée nulle sur I, elle est donc constante sur I.
On nomme C cette constante. Ainsi : $F(x) - G(x) = C$ pour tout x de I.
On en déduit que les deux primitives de f diffèrent d'une constante.

Propriété

f est une fonction définie sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel C, la fonction $x \longmapsto F(x) + C$ est aussi une primitive de la fonction f sur I.

Démonstration

F est une primitive de f sur I.
On pose $G(x) = F(x) + C$.
$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$
Donc G est une primitive de f sur I.

Exemple

a. Montrer que $F(x) = x^2 + 6x$ définie sur $\mathbb{R}$ est une primitive de la fonction $f(x) = 2x + 6$.
Donner 4 primitives différentes de la fonction f.

b. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x$.
   (a) Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = x^3 - x^2$ est une primitive de f.
   (b) Déterminer la fonction G primitive de f tel que $G(1) = 3$.

Théorème

Existence de primitives :
Soit f une fonction continue sur I. Alors f possède des primitives sur I.

Théorème

Soit f une fonction continue sur I. Étant donné $x_0 \in I$ et $c_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = c_0$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$

a. Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = \dfrac{e^{2x}}{x}$ est une primitive de f.

b. Déterminer la primitive G de la fonction f qui s'annule en $x = 1$.

II Déterminer la primitive d'une fonction

II.1 Primitives usuelles

Fonction	Primitive
$f(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1} \times x^{n+1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ avec $x > 0$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ avec $x > 0$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$	$f(t) = \dfrac{A}{\omega}\sin(\omega t + \phi)$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ avec $\omega \neq 0$	$f(t) = -\dfrac{A}{\omega}\cos(\omega t + \phi)$ avec $\omega \neq 0$

Propriété

Si F est une primitive de f sur I, et G une primitive de g sur I :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- λF est une primitive de λf sur I avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = x^5$

b. $f(x) = 6x^6 - 2x^2 + 3$

c. $f(x) = 7x^3$

d. $f(x) = 7\cos(3t - \pi)$

e. $f(x) = x^3 + 6x - 3$

f. $f(t) = -4\sin(-t + \frac{\pi}{2})$

g. $f(x) = x^3 - 2$

h. $f(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x^2}$

i. $f(x) = \dfrac{3}{x}$ avec $x > 0$

j. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

k. $f(x) = 5\cos\left(25t + \frac{\pi}{4}\right)$

II.2 Primitives de fonctions composées

Fonction	Primitive
$2u'u$	u^2
$u'e^u$	e^u
$\dfrac{u'}{u}$ avec $u > 0$	$\ln(u)$

Exemple

Exemple

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

a. $f(x) = x^3 - 2x$ sur $I = \mathbb{R}$

b. $f(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$

c. $f(x) = (2x-5)(x^2-5x+4)$ sur $I = \mathbb{R}$

d. $f(x) = xe^{x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$

e. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$ sur $I =]0; +\infty[$

III La méthode d'Euler

Remarque

La méthode d'Euler permet d'obtenir une approximation de la valeur d'une primitive F d'une fonction f, au point d'abscisse x :

$$F(x_{i+1}) \approx F(x_i) + hf(x_i)$$

On obtient ainsi les valeurs de la primitive de proche en proche.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[1; 6]$ A l'aide de la méthode d'Euler et en prenant un pas de 0,5 (donc $h = 0.5$), déterminer une approximation de la primitive F de la fonction f sur $[1; 6]$ tel que : $F(1) = 0$

Représenter la primitive obtenue dans un repère orthogonal sur l'intervalle $[1; 6]$.