Version 250325

2024/2025

Primitive

Inverse de la notion de dérivée, celle de primitive a joué un rôle essentiel dans le développement du calcul différentiel et intégral. En sciences physiques, la vitesse est la dérivée de l'équation du mouvement et une primitive de son accélération. Aussi des relation entre ces trois données débouchent sur les équations différentielles, d'où leur importance, mais aussi leur difficulté car aucune théorie générale n'existe.

I Notion de primitive d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f sur I, une fonction F tel que $F' = f$.

Exemple

On considère les fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 4x+1 \end{array} \qquad F : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x^2+x+1 \end{array}$$

Montrer que f est la fonction dérivée de la fonction F.
F est donc une **primitive** de f.

Propriété

f est une fonction définie sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel C, la fonction $x \longmapsto F(x) + C$ est aussi une primitive de la fonction f sur I.

Démonstration

F est une primitive de f sur I.
On pose $G(x) = F(x) + C$.
$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$
Donc G est une primitive de f sur I.

Exemple

a. Montrer que $F(x) = x^2 + 6x$ définie sur $\mathbb{R}$ est une primitive de la fonction $f(x) = 2x + 6$.
Donner 4 primitives différentes de la fonction f.

b. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x$.
   (a) Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = x^3 - x^2$ est une primitive de f.
   (b) Déterminer la fonction G primitive de f tel que $G(1) = 3$.

II Déterminer la primitive d'une fonction

II.1 Primitives usuelles

Fonction	Primitive
$f(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1} \times x^{n+1}$
$f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$	$f(t) = \dfrac{A}{\omega}\sin(\omega t + \phi)$
$f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$	$f(t) = -\dfrac{A}{\omega}\cos(\omega t + \phi)$

Propriété

Si F est une primitive de f sur I, et G une primitive de g sur I :
- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- λF est une primitive de λf sur I avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = x^5$

b. $f(x) = 6x^6 - 2x^2 + 3$

c. $f(x) = 7x^3$

d. $f(x) = 7\cos(3t - \pi)$

e. $f(x) = x^3 + 6x - 3$

f. $f(t) = -4\sin(-t + \dfrac{\pi}{2})$

III La méthode d'Euler

Remarque

La méthode d'Euler permet d'obtenir une approximation de la valeur d'une primitive F d'une fonction f, au point d'abscisse x :

$$F(x_{i+1}) \approx F(x_i) + hf(x_i)$$

On obtient ainsi les valeurs de la primitive de proche en proche.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[1;6]$ A l'aide de la méthode d'Euler et en prenant un pas de 0,5 (donc $h = 0.5$), déterminer une approximation de la primitive F de la fonction f sur $[1;6]$ tel que : $F(1) = 0$

Représenter la primitive obtenue dans un repère orthogonal sur l'intervalle $[1;6]$.