



PRIMITIVE

I Notion de primitive d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On appelle **primitive** de f sur I , une fonction F tel que $F' = f$.

Définition

Exemple

On considère les fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 4x + 1$$

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x^2 + x + 1$$

Montrer que f est la fonction dérivée de la fonction F .

F est donc une **primitive** de f .

f est une fonction définie sur un intervalle I .

Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel C , la fonction $x \mapsto F(x) + C$ est aussi une primitive de la fonction f sur I .

Propriété

F est une primitive de f sur I .

On pose $G(x) = F(x) + C$.

$$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$$

Donc G est une primitive de f sur I .

Démonstration

Exemple

- Montrer que $F(x) = x^2 + 6x$ définie sur $\mathbb{R}$ est une primitive de la fonction $f(x) = 2x + 6$.
Donner 4 primitives différentes de la fonction f .
- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x$.
 - Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = x^3 - x^2$ est une primitive de f .
 - Déterminer la fonction G primitive de f tel que $G(1) = 3$.

II Déterminer la primitive d'une fonction

II.1 Primitives usuelles

Fonction	Primitive
$f(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1} \times x^{n+1}$
$f(t) = A \cos(\omega t + \phi)$	$f(t) = \frac{A}{\omega} \sin(\omega t + \phi)$
$f(t) = A \sin(\omega t + \phi)$	$f(t) = -\frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \phi)$

Propriété

Si F est une primitive de f sur I , et G une primitive de g sur I :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- λF est une primitive de λf sur I avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- a. $f(x) = x^5$ c. $f(x) = 7x^3$ e. $f(x) = x^3 + 6x - 3$
b. $f(x) = 6x^6 - 2x^2 + 3$ d. $f(x) = 7 \cos(3t - \pi)$ f. $f(t) = -4 \sin(-t + \frac{\pi}{2})$

III La méthode d'Euler

Remarque

La méthode d'Euler permet d'obtenir une approximation de la valeur d'une primitive F d'une fonction f , au point d'abscisse x :

$$F(x_{i+1}) \approx F(x_i) + hf(x_i)$$

On obtient ainsi les valeurs de la primitive de proche en proche.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1; 6]$ A l'aide de la méthode d'Euler et en prenant un pas de 0,5 (donc $h = 0.5$), déterminer une approximation de la primitive F de la fonction f sur $[1; 6]$ tel que : $F(1) = 0$

Représenter la primitive obtenue dans un repère orthogonal sur l'intervalle $[1; 6]$.