Version 241228

LABOR ET DILECTIO — PAU 1884

2024/2025

Équations polynomiales

Le génial mathématicien **Évariste Galois** (1811-1832) a démontré, alors qu'il était encore étudiant, qu'une équation polynomiale de degré cinq ne peut se résoudre par radicaux c'est à dire qu'il n'existe pas de formule donnant les solutions en fonction de racines des coefficients. Sa méthode de démonstration allait beaucoup plus loin que ce simple problème puisqu'elle a débouché sur la théorie des groupes qui est devenue la base de nombreuses branches des mathématiques. Mort en duel à vingt ans, l'importance de ses écrits n'a été comprise que quinze ans plus tard par Joseph Liouville.

I Notion de polynôme

Définition

On appelle fonction polynôme à coefficients réels, ou plus simplement polynôme, toute fonction P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

où n est un entier naturel et $a_0,\ a_1, \dots,\ a_n$ des réels.

Remarque

Dans l'écriture ci-dessus les réels $a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_n$ sont appelés les coefficient du polynôme P.

Définition

On considère un polynôme P de la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0,\ a_1, \dots,\ a_n \in \mathbb{R}$. Si $a_n \neq 0$, l'entier n est appelé le degré du polynôme P.

Remarque

- Un polynôme de degré 0 est une fonction constante non nulle de la forme $P(x) = a$, avec $a \neq 0$.
- Un polynôme de degré 1 est une fonction affine de la forme $P(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$.
- Un polynôme de degré 2 est un trinôme du second degré de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Théorème

- Un polynôme est nul si, et seulement si, ses coefficients sont nuls.
- Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients.

Définition

On dit qu'un nombre (réel ou complexe) a est racine d'un polynôme P lorsque $P(a) = 0$.

Exemple

On pose $P(x) = 3x^3 - x^2 - 2$, $Q(x) = x^3 - 8$ et $R(x) = x^2 + 1$.
Alors 1 est racine de P, 2 est racine de Q et i est racine de R.

Définition

Soit P un polynôme et a un nombre réel ou complexe. Le polynôme P est factorisable par $x - a$ lorsque l'on peut écrire $P(x) = (x-a)Q(x)$, ou Q est un polynôme.

II Solutions d'une équation polynomiale du second degré à coefficients réels.

Théorème

On considère l'équation du second degré $(E)\ :\ az^2 + bz + c = 0$ où $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $az^2 + bz + c$.

- Si $\Delta > 0$, (E) admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  On a alors la factorisation suivante :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

- Si $\Delta = 0$, (E) admet une unique solution réelle dite double :

$$z_0 = -\frac{b}{a}$$

  On a alors la factorisation suivante :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$$

- Si $\Delta < 0$, (E) admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

  On a alors la factorisation suivante :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) = a(z - z_1)(z - \overline{z_1})$$

On met le trinôme sous sa forme canonique (classe de 1ere) :
$az^2 + bz + c = a(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$
En posant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$\begin{aligned} & az^2 + bz + c = 0 \\ \iff & a(z + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a} \\ \iff & (z + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \end{aligned}$$

Si $\Delta > 0$ le résultat est immédiat.
Si $\Delta = 0$, l'équation peut s'écrire $(z + \frac{b}{2a})^2 = 0$ d'où $z = -\frac{b}{2a}$.
Si $\Delta < 0$, l'équation peut s'écrire $(z + \frac{b}{2a})^2 = i^2 \frac{-\Delta}{4a^2}$ d'où le résultat.

Démonstration

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a. $z^2 + 5 = 0$
b. $z^2 + 3z + 4 = 0$

Le théorème précédent permet notamment de déterminer les racines d'un polynôme de degré 2.
En notant Δ le discriminant d'un trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta > 0$, P admet deux racines réelles distinctes ;
- Si $\Delta = 0$, P admet une unique racine réelle (double) ;
- Si $\Delta < 0$, P admet deux racines complexes conjuguées.

Pour synthétiser, on parle alors des deux racines distinctes ou confondues d'un polynôme de degré 2

Remarque

Soit z_1 et z_2 les racines (distinctes ou confondues) de l'équation du second degré $az^2+bz+c = 0$ où $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Alors :

$$z_1 z_2 = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$$

Théorème

III Factorisation d'un polynôme

Soit z et a deux nombres complexes, n un entier naturel non nul. Alors :

$$z^n - a^n = (z-a)(z^{n-1} + z^{n-2}a + z^{n-3}a^2 + ... + za^{n-2} + a^{n-1}) = (z-a)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}a^k$$

Donc $z^n - a^n = (z - a)Q(z)$ avec Q un polynôme de degré $n - 1$.

Théorème

Exemple

Appliquer la formule de factorisation avec z^n et $a = 1$. ($n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$)

Démonstration

Pour ce théorème, nous allons voir deux démonstrations possibles :
Soit $z \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Méthode 1 :

$$(z-a)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}a^k = \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k}a^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}a^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k}a^k - \sum_{k=1}^{n} z^{n-k}a^k = z^n - a^n$$

Méthode 2 :

Si $a = 0$, le résultat est évident.

Si $a = 1$, $(z-1)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k} - \sum_{k=1}^{n} z^{n-k} = z^n - 1$

Si a quelconque, on vient de montrer que $z^n - 1 = (z-1)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}1^k$

En prenant $\frac{z}{a}$ à la place de z

$$\left(\frac{z}{a}\right)^n - 1 = \left(\frac{z}{a} - 1\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{z}{a}\right)^{n-1-k} \times 1^k$$

Donc en multipliant par a^n des deux côtés de l'égalité :

$$z^n - a^n = (z-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1} \times \left(\frac{z}{a}\right)^{n-1-k} \times 1^k$$

Finalement, $z^n - a^n = (z-a)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}a^k$

Théorème

Si P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et a une racine de P, alors P est factorisable par $z - a$.

$$P(z) = (z-a)Q(z)$$

Avec Q un polynôme de degré $n-1$.

Démonstration

Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\alpha_0,\ \alpha_1, ...,\ \alpha_n \in \mathbb{R}$ les coefficients de P.

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$$

Comme a est racine de P alors $P(a) = 0$.

Donc $P(z) = P(z) - P(a) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k a^k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (z^k - a^k)$

Or nous avons déjà vu et démontré que $z^k - a^k = (z-a)Q_k(z)$ avec Q_k un polynôme de degré $k-1$.

Donc $P(a) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (z-a)Q_k(z) = (z-a)\sum_{k=0}^{n} \alpha_k Q_k(z)$

Finalement, en notant $Q(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k Q_k(z)$ On obtient :

$$P(z) = (z-a)Q(z)$$

avec Q un polynôme de degré $n-1$.

Théorème

Un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au plus n racines.

Démonstration

Nous allons démontrer ce résultat par récurrence.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$\mathcal{P}(n) \ : \ \text{« Un polynôme de degré } n \text{ a au plus } n \text{ racines ».}$$

Initialisation :
Un polynôme de degré 0 est une fonction constante de la forme $P(x) = a$ avec $a \neq 0$. Comme $a \neq 0$, la fonction P ne s'annule jamais, donc P n'a aucune racine, ce qui montre que $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \geq 0$ et montrons que cela implique $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.
Soit P un polynôme de degré $n+1$. On distingue deux cas.

- Si P n'a aucune racine, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie puisque $0 < n+1$.
- Si P a une racine a, alors P est factorisable par $z - a$, donc on peut écrire :

  $$P(z) = (z-a)Q(z)$$

  Où Q est un polynôme de degré n.
  Si b est également une racine de P, alors

  $$P(b) = 0 = (b-a)Q(b)$$

  Donc $a = b$ ou $Q(b) = 0$ et donc b est une racine de Q.
  Or d'après l'hypothèse de récurrence, Q étant un polynôme de degré n, il admet au plus n racines. Il y a donc $n+1$ possibilités pour b ($b = a$ ou b est une des n racines de Q).
  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}$ est héréditaire à partir du rang $n = 0$, donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exemple

Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P(z) = z^3 + z^2 + 4z + 4$.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$.