Polynôme de degrès 2

I Trinôme du second degré

I.1 Équations du second degré

Définition

On appelle trinôme du second degré toute expression de la forme $ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres réels quelconques, et $a \neq 0$.

Exemple

Quelques trinômes du second degré :

Trinômes	$a =$	$b =$	$c =$
$P(x) = 3x^2 + 2x - 5$	$a = 3$	$b = 2$	$c = -5$
$Q(x) = \sqrt{2}x^2 - 3x + \dfrac{2}{3}$	$a = \sqrt{2}$	$b = -3$	$c = \dfrac{2}{3}$
$R(x) = -x^2 + \dfrac{5}{2}x$	$a = -1$	$b = \dfrac{5}{2}$	$c = 0$
$S(x) = 3x^2 - (1 - \sqrt{2})x - \pi$	$a = 3$	$b = -(1 - \sqrt{2})$	$c = -\pi$
$T(x) = \dfrac{6}{5}x^2 - 3$	$a = \dfrac{6}{5}$	$b = 0$	$c = -3$
$U(x) = (x - 2)^2 + 3(x + 3)$	$a = \dots$	$b = \dots$	$c = \dots$

I.2 Représentation graphique

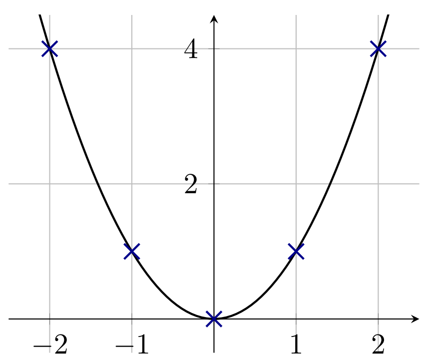
Remarque

La représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 s'appelle une **parabole**.

Propriété

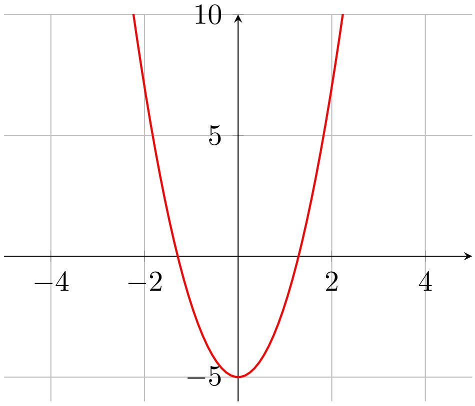
Soit f une fonction polynôme du second degré, telle que $f(x) = ax^2 + b$.

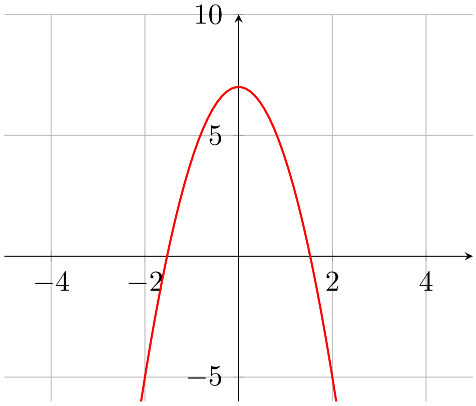
- Si a est positif, f est d'abord décroissante, puis croissante (forme de cuvette).
- Si a est négatif, f est d'abord croissante, puis décroissante (colline).



Exemple

$a > 0$ $\qquad$ $a < 0$





La fonction f telle que $f(x) = -3x^2 + 7$ a pour représentation graphique une parabole dont les branches sont tournées vers le bas et dont le sommet est le point $S(0;7)$.
L'axe de symétrie de la parabole est l'axe des ordonnées.

Propriété

Les paraboles d'équation $y = ax^2 + b$ a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées et pour sommet le point de coordonnées $(0;b)$.

Exemple

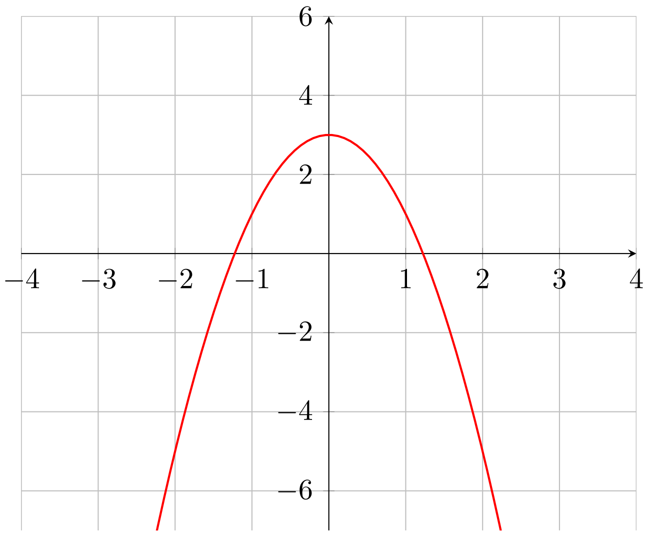
Déterminer graphiquement l'expression d'une fonction à partir de sa représentation graphique :

a. La courbe est une parabole et a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées, donc f est de la forme : $f(x) = ax^2 + b$.

b. Le sommet de la parabole a pour coordonnées $(0;3)$, donc : $f(x) = ax^2 + 3$

c. On lit graphiquement : $f(1) = 1$.
Donc $1 = a \times 1^2 + 3$

d. Finalement $y = -2x^2 + 3$



II Forme factorisée d'une fonction polynôme de degré 2

Définition

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ sont des fonctions polynômes du second degré.
Les coefficients a, x_1 et x_2 sont des réels avec $a \neq 0$.

Exemple

Écrire les fonctions polynomiales du second degré suivantes sous la forme $ax^2 + bx + c$:

a. $f(x) = 2(x-2)(x+2)$

b. $g(x) = 3(x-5)(x+1)$

Exemple

Représenter graphiquement une fonction du second degré à partir de sa forme factorisée.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-2)(x+4)$.
Déterminer :

a. l'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses,

b. son axe de symétrie,

c. les coordonnées de son extremum.
Placer au fur et à mesure ces éléments géométriques dans un repère puis tracer la parabole représentant la fonction f.

Propriété

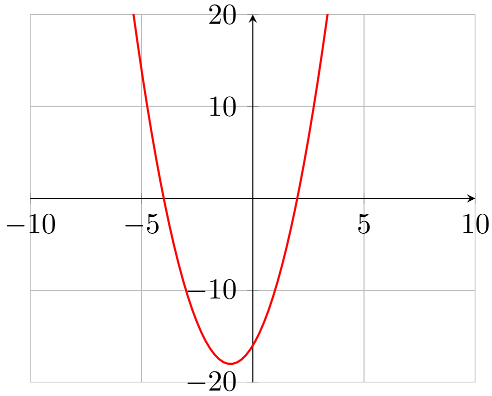
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

- L'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions (éventuellement égales) : $x = x_1$ et $x = x_2$ appelées les racines de la fonction polynôme f.
- La droite d'équation $x = p$ avec $p = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ est l'axe de symétrie de la parabole représentant la fonction f.

Exemple

En reprenant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-2)(x+4)$:

- Les racines de ce polynôme sont $x_1 = 2$ et $x_2 = -4$.
- On en déduit $p = \dfrac{2-4}{2} = -1$
  Donc la droite d'équation $x = -1$ est l'axe de symétrie de la parabole représentant la fonction f. On peut tracer cette droite dans le repère.
- Le sommet S de la parabole se trouve sur l'axe de symétrie, donc il a pour abscisse $p = -1$ et pour ordonnées : $f(-1) = 2(-1-2)(-1+4) = -18$.
  On peut alors placer le point S dans le repère.
- Dans l'expression de $f(x)$, on a $a = 2$ donc $a > 0$. La parabole est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty; -1]$, puis croissante sur l'intervalle $[-1; +\infty[$. On obtient donc la courbe suivante :



Exemple

Comment factoriser une expression du second degré ?
Soit $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$. En vous aidant d'une racine évidente de la fonction f, factoriser l'expression de la fonction.

III Signe d'une fonction polynôme de degré 2

Exemple

Étudier le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x-3)(x+2)$
Le signe de f dépend du signe de chaque facteur. On utilise donc un tableau de signe.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$(x-3)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{4x+3}{5x+1}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que $f(x) \geq 0$ pour $x \in [-2;3]$ et $f(x) \leq 0$ pour $x \in]-\infty;-2] \cup [3;+\infty[$.