LABOR ET DILECTIO — PAU 1884

2022/2023

Parallèles et perpendiculaires

La géométrie étudiée au collège est la géométrie euclidienne du savant grec **Euclide** vivant à Alexandrie au 3e siècle avant J.C. Il a fondé les postulats (points de départ) de notre géométrie :

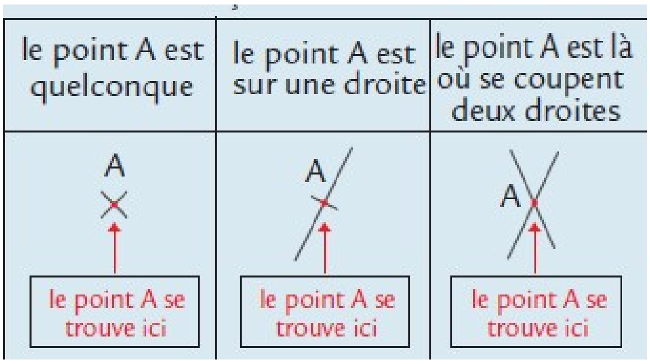
- Par 2 points passent une et une seule droite.
- Deux droites non parallèles se croisent en un point et un seul.
- Il existe qu'une seule droite passant par un point et parallèle à une autre droite.

Le mot « Géométrie » vient du grec « geo » (terre) et « metron » (mesure).

I Le point

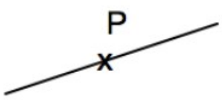
I.1 Représentations

Un point se représente de 3 façons différentes :



Remarque

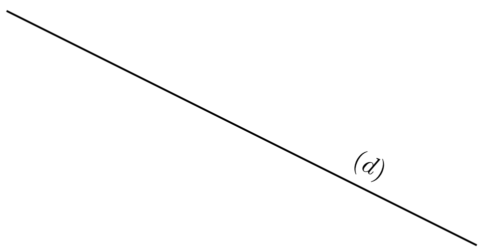
- Dans le cas du triangle, les sommets sont les points d'intersections de 3 droites. On utilise donc la troisième représentation pour les sommets d'un triangle.
- Dans la figure ci-dessous, la représentation du point sur la droite par une croix nous indique l'ordre de construction de la figure : le point a été construit avant la droite.



II Droites du plan

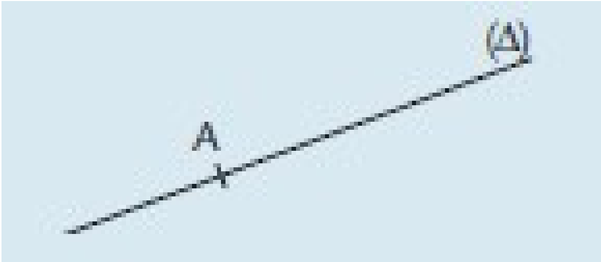
Une droite

Une droite est une ligne droite illimitée « des deux côtés ». On la représente par un trait droit. On peut la nommer à l'aide d'une lettre écrite entre parenthèses.
Ci-contre, on a par exemple tracé la droite (d).



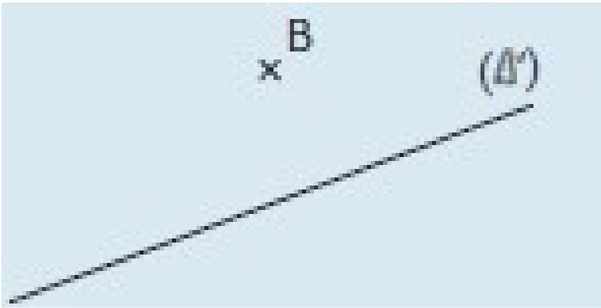
Droite et point :

On a représenté ci-dessous deux droites (Δ) et (Δ'). Le symbole Δ se prononce « delta », c'est la lettre D écrite en grec.



La droite (Δ) passe par le point A. On peut également dire et écrire :

- « A est un point de la droite (Δ) ».
- « Le point A appartient à la droite (Δ) ».
- On écrit $A \in (\Delta)$

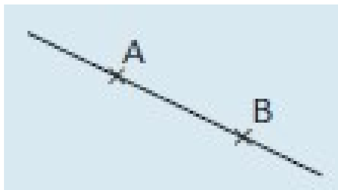


La droite (Δ') ne passe pas par le point B. On peut également dire et écrire :

- « B n'est pas un point de la droite (Δ') ».
- « Le point B n'appartient pas à la droite (Δ') ».
- On écrit $A \notin (\Delta')$

Propriété

Par deux points distincts (c'est-à-dire différents) A et B, il ne passe qu'une seule droite. On note cette droite (AB) ou (BA).

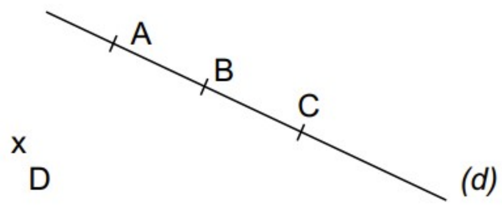


Conséquences pour la notation :

Quand au moins deux points sont représentés sur une droite, il est possible de la nommer de plusieurs façons.

La droite (d) possède d'autres noms : (AB) ; (BA) ; (AC) ; (CA) ; (BC) et (CB). On a alors, par exemple, les relations d'appartenance suivantes :

- $A \in (AB)$
- $C \in (d)$
- $D \notin (CB)$



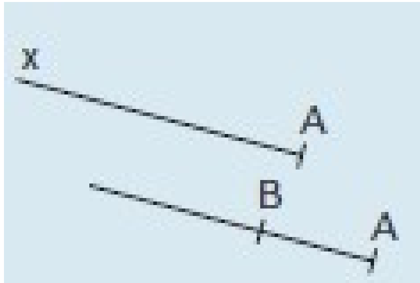
Remarque

Reconnaître que trois points (ou plus) sont alignés revient à reconnaître que ces points appartiennent à une même droite. Dans l'exemple ci-dessus, les points A, B et C sont alignés.

III Demi-droite et segment

Demi-droite :

Une demi-droite est une ligne droite limitée « d'un côté » et illimitée « de l'autre ». Une demi-droite d'origine A est une demi-droite limitée par le point A. On peut la noter $[Ax)$.
La demi-droite d'origine A passant par le point B se note $[AB)$.



Remarque

Lorsqu'on nomme une demi-droite, on commence par citer son origine. Dans la notation [AB), le crochet tourné vers A rappelle que la demi-droite est limitée par son origine A et que A est un point de [AB). La parenthèse rappelle que la demi-droite est illimitée du « côté » de B.

Segment :

La partie de la droite (AB) comprise entre les points A et B est appelé le segment d'extrémités A et B. On le note $[AB]$ ou $[BA]$. On mesure la longueur d'un segment avec une règle graduée. On note AB ou BA la longueur du segment $[AB]$. Les phrases suivantes ont la même signification : « Le segment $[AB]$ mesure 4 cm. » ou « La longueur du segment $[AB]$ est égale à 4 cm. » ou « $AB = 4cm.$ »

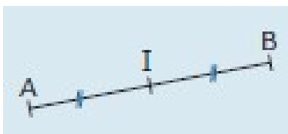
Attention : il ne faut pas confondre $[AB]$ qui désigne un segment et AB qui désigne un nombre (puisque c'est une longueur).

Remarque

On utilise deux crochets lorsqu'on nomme un segment afin de rappeler qu'un segment est limité à ses deux extrémités et que les deux extrémités appartiennent au segment.

Définition

Le milieu I du segment $[AB]$ est le seul point du segment $[AB]$ tel que $IA = IB$. Les deux petits traits bleus sur le segment $[AI]$ et sur le segment $[IB]$ signifient que les segments $[AI]$ et $[IB]$ ont la même longueur. On appelle ces traits « un codage ». Ils permettent de visualiser l'égalité de longueur sur la figure. On peut utiliser de nombreux codages différents (deux traits, trois traits, une croix, un petit cercle...) pour signifier que des segments sont de même longueur.



Remarque

Cette définition signifie que le milieu d'un segment est l'unique point (c'est-à-dire qu'il n'y en a pas d'autre) qui vérifie à la fois les deux conditions suivantes :

- I est un point du segment $[AB]$ (c'est-à-dire « $I \in [AB]$ »)
- I est à la même distance de A que de B (c'est-à-dire « $IA = IB$ »).

IV Position de droites

Définition

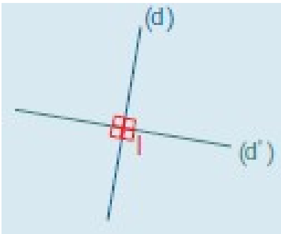
Droites sécantes :

On dit que deux droites sont sécantes lorsqu'elles ont un point commun et un seul.

Exemple :
Ci-contre, (d) et (d') sont sécantes. I est le point d'intersection des droites (d) et (d'). $I \in (d)$ et $I \in (d')$. On dit également : les droites (d) et (d') sont sécantes en I.

Droites perpendiculaires :

Deux droites sécantes qui forment un angle droit sont appelées des droites perpendiculaires.



Exemple : Pour exprimer qu'une droite est perpendiculaire à une autre, on utilise le symbole « $\perp$ ». On écrit : $(d) \perp (d')$ Le symbole $\perp$ signifie : « est perpendiculaire à ». Pour coder l'angle droit sur la figure, on représente un petit carré (un seul carré suffit).

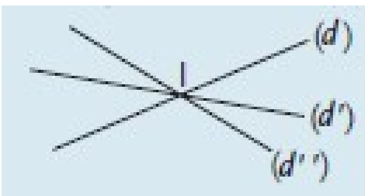
Droites parallèles :

Deux droites qui ne sont pas sécantes sont appelées des droites parallèles.

Exemple : Pour exprimer qu'une droite est parallèle à une autre, on utilise le symbole « // ». On écrit : $(d)//(d')$. Le symbole // signifie : « est parallèle à ».

Droites concourantes :

Dire que trois droites ou plus sont concourantes, c'est dire que ces droites ont un point commun et un seul.



Exemple : les droites (d), (d') et (d'') sont concourantes en I.
I est le point commun aux droites (d), (d') et (d''). On dit aussi : I est le point de concours des droites (d), (d') et (d''). On a $I \in (d)$; $I \in (d')$ et $I \in (d'')$

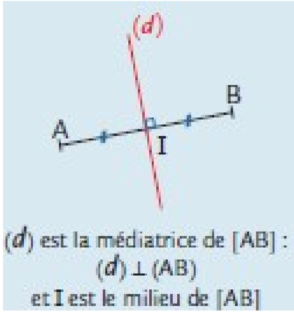
Propriété

Soit une droite (d) et un point A. Il existe une seule droite passant par A et perpendiculaire à (d).

Définition

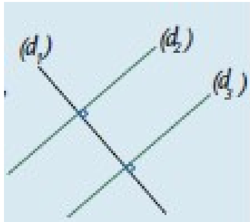
La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu. Cette définition signifie que la médiatrice d'un segment est la seule droite qui

- est perpendiculaire au segment
- le coupe en son milieu.

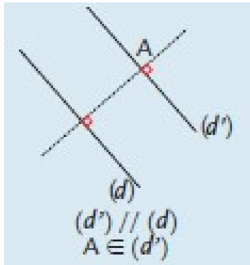


Propriété

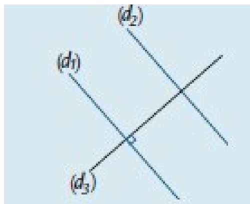
- Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors elles sont parallèles. Ceci s'écrit également : Si $(d2) \perp (d1)$ et $(d3) \perp (d1)$ alors $(d2)//(d3)$



- Soit une droite (d) et un point A. Il existe une seule droite (d') passant par A et parallèle à (d).



- Soient deux droites parallèles. Si une troisième droite est perpendiculaire à l'une de ces deux droites, alors elle est perpendiculaire à l'autre.
  Si $(d1)//(d2)$ et $(d3) \perp (d1)$ alors $(d3) \perp (d2)$.

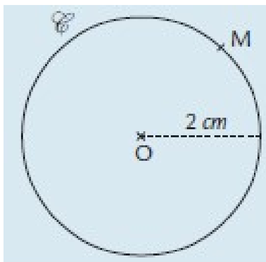


- Si deux droites sont parallèles à une troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.
  Si $(d1)//(d2)$ et $(d1)//(d3)$ alors $(d2)//(d3)$

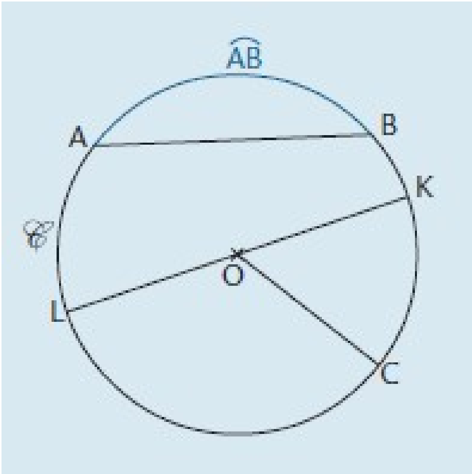
V Le cercle

Définition

Le cercle C de centre O et de rayon 2 cm est l'ensemble de tous les points situés à 2 cm du point O. Autrement dit :
Si $M \in C$ alors $OM = 2cm$.
Si $OM = 2cm$ alors $M \in C$.



Vocabulaire :
Soit un cercle C de centre O et de rayon 2,5 cm.



- Un rayon est un segment dont les extrémités sont un point du cercle et le centre O du cercle. Exemples : [OC], [OL], [OK] Le rayon est la longueur de chaque rayon soit ici 2,5 cm.
- Une corde est un segment dont les extrémités sont deux points du cercle. Exemple : [AB]
- Un diamètre est une corde qui passe par le centre O du cercle. Exemple : [KL] Le diamètre est la longueur de chaque diamètre soit ici 2 x 2,5 soit 5 cm.
- L'arc AB est la plus petite portion de cercle comprise entre les points A et B.