



NOMBRES COMPLEXES

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fait preuve, dès le plus jeune âge, d'aptitudes intellectuelles exceptionnelles. Il se passionne pour l'astronomie et, la même année, il découvre l'astéroïde Cérès et publie un ouvrage fondamental sur la théorie des nombres : il n'a que 24 ans ! Par la suite, il explore de nombreuses branches des mathématiques, ouvrant chaque fois des perspectives nouvelles. Il utilise dès 1801 les nombres complexes pour déterminer les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas. C'est à lui qu'on doit le qualificatif de « complexe » pour nommer ces nombres, non pas parce qu'ils sont compliqués mais parce qu'ils s'expriment à l'aide de deux nombres réels.

I Rappels de la classe de première

I.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

- On appelle **forme algébrique** d'un nombre complexe z l'écriture $z = a + ib$ avec a et b réels.
- Soit un nombre complexe $z = a + ib$, on appelle **nombre complexe conjugué de z** , le nombre noté $\bar{z}$, tel que $\bar{z} = a - ib$.

Définition

- Le nombre a s'appelle la partie réelle et le nombre b s'appelle la partie imaginaire. On note : $Re(z) = a$ et $Im(z) = b$
- Si l'on additionne un nombre complexe et son conjugué, on obtient le double de sa partie réelle : $z + \bar{z} = 2a$

Remarque

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a. $3z - 6 = 4i + z$

b. $z^2 + 5 = 0$

Exemple

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a. $z = 2 + i - 7 - 2i$

e. $z = (2 - 2i)(5 + 7i)$

h. $z = \frac{2 + i}{1 + 2i}$

b. $z = 4 - 5i - (5 + 3i)$

f. $z = (4 + 4i)(-1 - i)$

c. $z = 7 + 54i - (-5 - 2i)$

g. $z = \frac{1}{1 - i}$

i. $z = \frac{(1 - i)(3 - 2i)}{(1 + i)}$

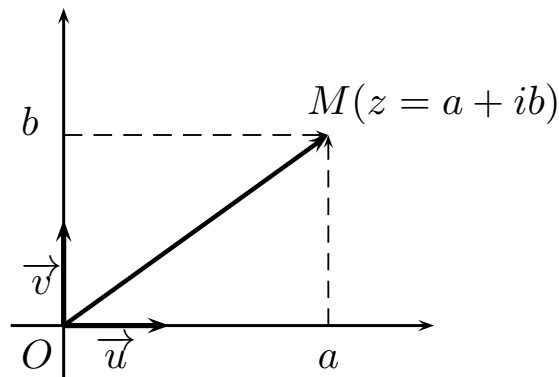
d. $z = 2i(3 + 4i)$

I.2 Plan complexe, module et argument

Définition

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ direct.

- À tout nombre complexe $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on associe son **image**, le point M de coordonnées $(a; b)$ et tout vecteur $\vec{w}(a; b)$.
- À tout point $M(a; b)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, et à tout vecteur $\vec{w}(a; b)$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$ appelé **affixe** du point M et **affixe** du vecteur $\vec{w}$.

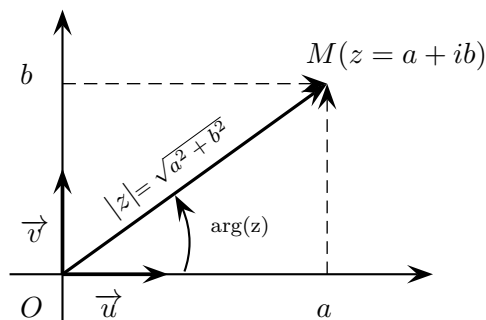


Définition

Soit dans le plan complexe un point M d'affixe $z = a + ib$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

- On appelle **module** de z le nombre **réel positif** $\sqrt{a^2 + b^2}$ noté $|z|$. Cette valeur est égale à la distance OM .
- On appelle **argument** du nombre complexe non nul z , noté $\arg(z)$, toute mesure en radians de l'angle orienté : $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. On a donc

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$



Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses, que l'on appelle donc **axe réel**.

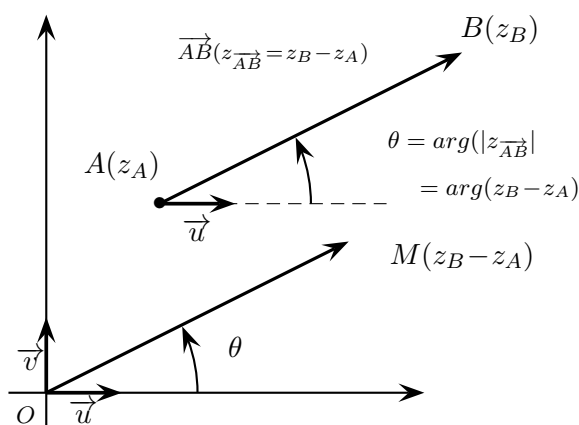
Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle, $z = 0 + iy = iy$ est appelé un nombre **imaginaire pur**. Les images de ces nombres sont les points de l'axe des ordonnées, que l'on appelle donc **axe imaginaire (pur)**.

Un nombre complexe non nul z a une infinité d'arguments : si θ est un de ces arguments, alors tous les autres sont de la forme $\theta + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On note $\arg(z) = \theta$ (modulo 2π), ou $\arg(z) = \theta [2\pi]$, ou encore, pour simplifier (mais alors par abus de langage), $\arg(z) = \theta$.

Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$, alors $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$ et donc,

- $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$
- $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = \arg(z_B - z_A)$.



Exemple

On considère les points A , B et C d'affixe respectif : $z_A = -2 - 2i$, $z_B = -5$ et $z_C = i$

- Placer ces points dans un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- Déterminer les longueurs OA , OB et OC et AB .
- Déterminer l'argument de z_A , z_B puis de z_C .

I.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Dans le plan complexe un point M peut-être repéré par ses coordonnées cartésienne $(x; y)$, ou son affixe complexe $z = x + iy$, ou par ses coordonnées polaires $(r; \theta)$, avec $r = OM$ et $\theta = (\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

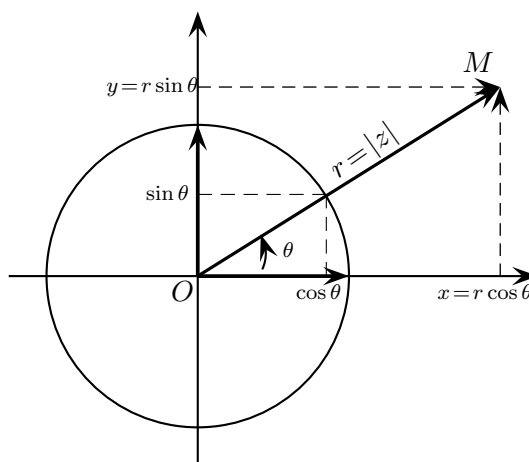
On a les relations :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}, \sin \theta = \frac{y}{r} \iff x = r \cos \theta \text{ et } y = r \sin \theta$$

L'affixe z du point M s'écrit alors, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

Cette écriture est la **forme trigonométrique** de z .



Exercice :

Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

- $z_1 = 3$
- $z_2 = -4$
- $z_3 = 2i$
- $z_4 = -1 + i$
- $z_5 = -\sqrt{3} + i$
- $z_6 = -17$
- $z_7 = -6\sqrt{3} + 6i$
- $z_8 = 5i$
- $z_9 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$

II Exponentielle complexe

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$. Comme les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, f l'est aussi, et,

$$f'(\theta) = -\sin(\theta) + i \cos \theta = i(i \sin \theta + \cos \theta) = i f(\theta)$$

Comme de plus, $f(0) = \cos 0 + i \sin 0 = 1$, on en déduit que f est définie de manière unique par l'expression $f(\theta) = e^{i\theta}$.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Ainsi, tout complexe z s'écrit sous la forme exponentielle complexe :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$$

où, $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

Propriété

Exemple

- $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$

$$\begin{aligned} \bullet e^{i\frac{2\pi}{3}} &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \bullet \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Pour tous réels θ et θ' , et tout entier naturel n ,

- $|e^{i\theta}| = 1$, et $\arg(e^{i\theta}) = \theta$
- $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (Formule de Moivre), c'est-à-dire, $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$
- $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta = \theta' [2\pi]$

Propriété

II.1 Exercices

- a. Placer dans le plan complexe et écrire sous formes trigonométrique et algébrique les nombres complexes :

(a) $3e^{-i\frac{\pi}{2}}$

(c) $6e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

(e) $2e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{3\pi}{2}}$

(b) $\sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}}$

(d) $5e^{i\frac{5\pi}{3}}$

(f) $\frac{3e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$

- b. Écrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes :

(a) 5

(c) $\frac{3}{2}i$

(e) $\sqrt{3} - i$

(b) $4 + 4i$

(d) $\frac{2}{1-i}$

(f) $(\sqrt{3} - i)^2$

(g) $(\sqrt{3} - i^3)$

II.2 Exercices

- a. On donne $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$, et $z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

Donner sous la forme exponentielle puis algébrique les complexes : $z_1 z_2 z_3$, $\frac{z_1}{z_2 z_3}$, z_2^2 , z_3^6 .

b. Simplifier l'expression, où $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2.$$

Était-ce prévisible sans calcul ?

c. Écrire le nombre complexe $(\sqrt{3} - i)^{10}$ sous forme algébrique.

III Formules de trigonométrie

III.1 Formules d'addition

Propriété

Soit a et b deux nombres réels quelconques. On a :

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Démontrer la propriété précédente..

Exercices :

Exercice 1 :

À l'aide des formules d'addition, montrer que :

- a. $2 \cos\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \cos\left(\frac{2}{3}x\right) + \sin\left(\frac{2}{3}x\right)$
- b. $\sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$
- c. $4 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \sin(2x) - 2\sqrt{2} \cos(2x)$

Exercice 2 :

En utilisant les formules d'addition, donner les valeurs exactes des cosinus et sinus de :

- a. $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$
- b. $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$
- c. $\frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$.

Propriété

Formules de duplication :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

Démontrer la propriété précédente..

IV Expression complexe des transformations

Soit un point M d'affixe z associé à un point M' d'affixe z' par une transformation du plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Il existe alors une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f(z) = z'$. La fonction f permet d'exprimer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M .

TRANSFORMATION	DÉFINITION	FONCTION ASSOCIÉE	FIGURE
Translation de vecteur $\vec{u}$ (d'affixe b)	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$f(z) = z + b$	
Homothétie de centre O et de rapport a (non nul)	$\overrightarrow{OM'} = a \overrightarrow{OM}$	$f(z) = az$	
Rotation de centre O et d'angle θ	$OM' = OM$ $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}) = \theta$	$f(z) = e^{i\theta} z$	

Exercice :

a. Soit les fonctions f , g et h de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, données par les expressions suivantes :

- $f(z) = (1 - i)(1 + i)z$
- $g(z) = z - 2i$
- $h(z) = -e^{i\frac{\pi}{3}} z$

Reconnaître la nature des transformations qui sont associées à chaque fonction. On précisera les éléments qui caractérisent ces transformations.

b. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \sqrt{3} \cos(3t) + \sin(3t)$.
Écrire f sous la forme : $f(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, A et ϕ à déterminer.