Version 250307

LABOR ET DILECTIO — PAU 1884

2024/2025

Matrices

Arthur Cayley est considéré comme l'inventeur des matrices ; c'est en tout cas lui qui le premier a défini les opérations d'addition et de multiplication matricielles. Les travaux scientifiques de ce mathématicien anglais ont permis une avancée notoire de l'algèbre dans la deuxième moitié du XIX^e siècle.

Le mot « matrice » vient du latin « mater » (mère). Comme on enregistrait les enfants à la naissance dans des registres, le mot désigna ces registres. Cela explique les mots « matricule » ou « immatriculation ».
Avec les mathématiciens Augustin Louis Cauchy (ci-contre) et Arthur Cayley, vers 1845, le mot prend naturellement le sens mathématique qu'on lui connaît aujourd'hui.

I Matrices

Définition

Une matrice A est un tableau à n lignes et p colonnes de nombres, appelés **coefficients** de la matrice. On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ où i désigne le numéro de la ligne et j le numéro de la colonne.
Ainsi $a_{i,j}$ désigne le coefficient situé sur la i-ème ligne et la j-ième colonne de A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Remarque

On dit alors que la matrice est de taille (ou de format) $n \times p$. n et p sont appelés les dimensions de la matrice. Lorsque $n = p$, on dit que la matrice est carrée d'ordre n.

- Une matrice de taille $1 \times p$ est appelée une matrice ligne.
- Une matrice de taille $n \times 1$ est appelée une matrice colonne.
- On appelle diagonale d'une matrice carrée A, l'ensemble des coefficients $a_{i,j}$ tels que $i = j$.
- Une matrice carrée dont tous les coefficients non situés sur la diagonale sont nuls est appelée une matrice diagonale.

Exemple

- Matrice de taille 2×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 7 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

- Matrice ligne :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemple

- Matrice colonne :

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- Matrice diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Matrice carrée d'ordre 5 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 & 6 & 7 \\ 7 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 9 & 7 \\ 9 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Définition

Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices. On dit que A et B sont égales, et on note $A = B$, si elles ont même taille $n \times p$ et pour tout $(i, j) \in [[1, n]] \times [[1, p]],\ a_{i,j} = b_{i,j}$.

Remarque

Une matrice qui a tous ses coefficients nuls est appelée matrice nulle, on la note 0. La matrice carrée d'ordre n qui a ses coefficients diagonaux égaux à 1 et les autres égaux à 0 est appelée matrice unité ou identité, on la note I_n.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II Opérations sur les matrices.

Définition

Soit A, B deux matrices de même taille $n \times p$. La matrice somme de A et de B est la matrice de taille $n \times p$ qui a pour coefficients les sommes des coefficients de A et de B. Plus précisément si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, alors $A + B$ est la matrice égale à $(c_{i,j})$ où pour tout $(i, j) \in [[1, n]] \times [[1, p]],\ c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 9 \\ 1 & 6 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 9 & 0 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Propriété

Propriétés de l'addition des matrices : Soit A, B, C et la matrice nulle 0 des matrices de même taille $n \times p$.

Commutativité

$A + B = B + A$

Associativité

$(A + B) + C = A + (B + C)$

Élément neutre

$0 + A = A + 0 = A$

Matrice opposée

Si $A = (a_{i,j})$, la matrice $-A = (-a_{i,j})$ vérifie $A + (-A) = (-A) + A = 0$.
$-A$ est appelée matrice opposée à A.

Remarque

$A - B$ est définie par $A + (-B)$.

Définition

Si A est une matrice de taille $n \times p$ et λ est un réel, alors λA est la matrice de taille $n \times p$ qui a pour coefficient λ fois ce de A. Plus précisément si $A = (a_{i,j})$ pour $i \in [[1, n]]$ et $j \in [[1, p]]$, alors λA est une matrice égale à $(d_{i,j})$ où pour tout $(i, j) \in [[1, n]] \times [[1, p]]$, $d_{i,j} = \lambda a_{i,j}$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 9 \\ 1 & 6 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Donner la matrice $B = -3A$.

Propriété

Propriétés de la multiplication des matrices par un réel.
Soit A, B deux matrices de même taille, λ, μ des réels.

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- $1\ A = A$ et $0\ A = 0$

Définition

Soit $A = (a_{1,k})_{1 \leq k \leq p}$ une matrice ligne, $B = (b_{k,1})_{1 \leq k \leq p}$ une matrice colonne. On définit la matrice produit $C = A \times B$ comme matrice constituée d'un seul coefficient c, où

$$c = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + \ldots + a_{1,p}b_{p,1} = \sum_{k=1}^{p} a_{1,k}b_{k,1}$$

Exemple

Donner la matrice produit $C = A \times B$ avec $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

Définition

Soit $A,\ B$ deux matrices de tailles respectives $n \times p$ et $p \times m$. La matrice produit $C = A \times B$ est la matrice de taille $n \times m$ telle que pour tout $(i, j) \in [[1, n]] \times [[1, m]]$, $c_{i,j}$ est égal au produit de la i-ème ligne de A et de la j-ième colonne de B. Plus précisément, si $A = (a_{i,k})$ et $B = (b_{k,j})$, alors $A \times B = (c_{i,j})$ où pour tout $(i, j) \in [[1, n]] \times [[1, m]]$,

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + ... + a_{i,p}b_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$$

Remarque

Le produit $A \times B$ est défini lorsque le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B.
On note indifféremment $A \times B$ ou AB la matrice produit.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 9 \\ 1 & 6 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & -4 & 6 \\ -8 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice produit $A \times B$.

Propriété

Propriétés du produit matriciel
Pourvu que les sommes et produits ci-dessous soient bien définis

Associativité
$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

Distributivité à gauche
$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

Distributivité à droite
$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$

Compatibilité avec le produit par un réel
$\lambda(A \times B) = (\lambda A) \times B = A \times (\lambda B)$

I_n est l'élément neutre
si A est carrée d'ordre n alors $I_n \times A = A \times I_n = A$.

⚠ Le produit matriciel n'est pas commutatif !
En général, $A \times B \neq B \times A$.

III Inverse d'une matrice carrée

Théorème

Une matrice carrée A d'ordre n est dite inversible s'il existe une matrice M, carrée d'ordre n, telle que $AM = MA = I_n$.
En ce cas, la matrice M est unique, on l'appelle la matrice inverse de A et on la note A^{-1}.

Démonstration

Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible. Montrons l'unicité de l'inverse de A. Soit M et M' deux matrices carrées telles que $AM = MA = I_n$ et $AM' = M'A = I_n$. En particulier, $AM = I_n = AM'$, les implications qui suivent résultent de l'associativité du produit matriciel.

$$AM = AM' \Longrightarrow M(AM) = M(AM') \Longrightarrow (MA)M = (MA)M' \Longrightarrow I_nM = I_nM' \Longrightarrow M = M'$$

L'unicité est ainsi démontrée.

Remarque

Si A est inversible alors A^{-1} est inversible et a pour matrice inverse A.

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

Toutes les matrices ne sont pas inversibles !

Exemple

Montrer que la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est $B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$.

Théorème

Inversion d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice.

$$\boxed{A \text{ est inversible si et seulement si } ad - bc \neq 0}$$

En ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Démonstration

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ deux matrices carrées d'ordre 2, on constate que

$$AB = BA = (ad - bc)I_2$$

- Si $ad - bc \neq 0$ posons $B' = \dfrac{1}{ad-bc}B$ alors $AB' = B'A = I_2$. Ainsi A est inversible d'inverse la matrice B', donc $A^{-1} = B'$.
- Réciproquement, supposons A inversible. Elle admet donc une unique matrice A^{-1}.
  On raisonne alors par l'absurde en supposant $ad - bc = 0$.
  On obtient alors $AB = BA = 0 \times I_2$.
  Or $A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = I_2B = B$ et $A^{-1}(AB) = A^{-1}0 = 0$
  Finalement, $B = 0$ ce qui est absurde car A est inversible donc au moins un coefficient a, b, c ou d est non nul (sinon $AA^{-1} = I_2 = 0$ absurde !).

Exemple

Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

IV Puissance d'une matrice carrée d'ordre p

Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre p. On définit les puissances de A par :

$$A^0 = I_p \text{ (si } A \neq 0), \; A^1 = A \text{ et pour } n \geq 2, \; A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$$

Propriété

Soit A une matrice carrée d'ordre p et soit m et n deux entiers naturels. Alors

$$A^m \times A^n = A^n \times A^m = A^{n+m}.$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2 et A^3.

b. Conjecturer alors la forme de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

c. Démontrer ce résultat.

Propriété

Si D est la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}$ alors $D^n = \begin{pmatrix} d_1^n & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n^n \end{pmatrix}$.

V Applications du calcul matriciel

Considérons le système de n équations linéaires à n inconnues (S) ci-dessous. On note $A = (a_{i,j})$ la matrice des coefficients, X (resp. Y) les matrices colonnes constituées des inconnues $x_1, \; x_2, \ldots, \; x_n$ (resp. les seconds membres $y_1, \; y_2, \ldots, \; y_n$). On a alors l'écriture matricielle :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = y_2 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = y_n \end{cases} \iff A \times X = Y$$

Propriété

Si A est inversible, l'unique solution $(x_1, \ldots, x_n)$ de (S) est donnée par :

$$X = A^{-1} \times Y$$

Exemple

On considère le système (S) suivant : $S \; : \; \begin{cases} 5x + 2y = 16 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases}$

Écrire (S) sous forme de matrices, puis le résoudre.

Dans le contexte de la propriété précédente, si A n'est pas inversible alors le système correspondant possède une infinité de solutions ou aucune solution.

Remarque

Une matrice carrée A est dite **diagonalisable** s'il existe une matrice carrée P inversible et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.

Définition

Avec les notations ci-dessus, on a :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = PD^nP^{-1}.$$

Propriété

Soit A, P et D trois matrices carrées de même ordre p, avec P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n non nul $A^n = PD^nP^{-1}$.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère la proposition $P(n)$ suivante : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Initialisation :

rang $n = 1$ (car n non nul).
$A^1 = A$ et $PD^1P^{-1} = PDP^{-1} = A$
Donc la proposition est vraie au rang 1.

Hérédité :

Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang $n > 0$ et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.
$A^{n+1} = A^nA = (PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) = PD(P^{-1}P)D^nP^{-1} = PDI_pD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$

Conclusion :

$P(n)$ vraie $\Longrightarrow P(n+1)$ vraie. La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 1$.
D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n > 0$.
La propriété est ainsi démontrée.

Démonstration

VI Suite de matrices colonnes

Plusieurs exemples pour comprendre :

- Considérons la suite $U_n = \begin{pmatrix} n^2 \\ 3n+1 \end{pmatrix}$ est une suite de matrices colonnes dont les coefficients sont les termes des suites numériques (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$ et $v_n = 3n+1$.
- On considère deux suites couplées, (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 2,\ v_0 = 4 \text{ et } \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 3v_n + 1 \\ v_{n+1} = -u_n + 5v_n - 4 \end{cases}$$

  On pose pour tout entier naturel n : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

  On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

  Donc $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, la relation matricielle de récurrence
  $U_{n+1} = AU_n + B$

Définition

Soit $U_0,\ U_1,\ U_2, \dots,\ U_n, \dots$ une suite de matrice colonne de taille $p \times 1$, c'est à dire que pour tout entier $n \in \mathbb{N},\ U_n$ est une suite de matrice de taille $p \times 1$. On note $(U_n)_{n \geq 0}$ cette suite. On dit que $(U_n)_{n \geq 0}$ est convergente si tous les coefficients de la matrice U_n sont les termes généraux de suites convergentes de réels.

Propriété

Suite géométrique de matrices colonnes

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de matrices colonnes de taille $p \times 1$ définie par la donnée de son premier terme U_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = Au_n$ où A est une matrice carrée d'ordre p. Alors

$$\text{Pour tout entier naturel } n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n U_0$$

Démonstration

Soit A une matrice carrée d'ordre P et (U_n) une suite de matrice de taille $p \times 1$ de premier terme U_0 et de relation de récurrence $U_{n+1} = AU_n$.
Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$ suivante : $U_n = A^n U_0$.

Initialisation :

rang $n = 0$.
$A^0 U_0 = U_0$
Donc la proposition est vraie au rang 0.

Hérédité :

Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang $n \geq 0$ et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.
$U_{n+1} = A(A^n U_0) = (AA^n)U_0 = A^{n+1}U_0$

Conclusion :

$P(n)$ vraie $\Longrightarrow P(n+1)$ vraie. La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$.
D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$.
La propriété est ainsi démontrée.

Exemple

Soit deux suites numériques couplées (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 1,\ v_0 = -1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n \\ v_{n+1} = -2u_n + 2v_n \end{cases}$$

Calculer u_6 et v_6.

Définition

On dit qu'une suite de matrices colonnes (U_n) de taille $p \times 1$ est convergente si les p suites dont les termes sont les p coefficients de (U_n) sont convergentes.
La limite de cette suite est la matrice colonne dont les coefficients sont les p limites obtenues.
Dans tous les autres cas, on dit que la suite est divergente

Exemple

- $A = \begin{pmatrix} n^2 \\ 3n+1 \end{pmatrix}$ est divergente.
- $A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{n^2+2}{n^2+1} \end{pmatrix}$ est convergente et sa limite est la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Propriété

(U_n) est une suite de matrices colonnes de taille p définie par la relation matricielle de récurrence $U_{n+1} = AU_n + B$ où A est une matrice carrée de taille p et B est une matrice colonne à p lignes. Si la suite (U_n) est convergente alors sa limite U est une matrice colonne vérifiant l'égalité $U = AU + B$.

Démonstration

Par unicité de la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = U \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} AU_n + B = AU + B \quad \text{donc} \quad U = AU + B$$

Exemple

Soit une suite (U_n) de matrices colonnes définie pour tout entier naturel n par $U_{n+1} = AU_n + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 0,5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Rechercher, si elle existe, la suite (U_n) constante

VII Transformations planes

Définition

Le plan est muni d'un repère.

- On appelle application du plan, toute fonction qui à chaque point M du plan associe un unique point M'.
- On dit qu'une application f est une transformation du plan dans lui-même si pour tout point M' il existe un unique point M tel que $M' = f(M)$.

Théorème

Le plan est muni d'un repère. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2 et B une matrice colonne à deux lignes.

- Alors $f \ : \ M(x;y) \mapsto M'(x';y')$, où $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$, est une application du plan.
- Si $ad - bc \neq 0$, alors f est une transformation du plan.

Démonstration

Le plan est muni d'un repère. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2 et B une matrice colonne à deux lignes.

- Soit $M(x;y)$ un point du plan, $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ définit une unique matrice colonne de deux lignes, et même chose pour $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$ égale à la matrice $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, donc le point $M(x';y')$ est unique. L'application $f \;:\; M(x;y) \mapsto M'(x';y')$ est bien définie.
- Si $ad - bc \neq 0$ alors la matrice A. Soit $M'(x';y')$ un point du plan, posons $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et résolvons l'équation $Y = AX + B$ d'inconnue X.

  $$Y = AX + B \iff AX = Y - B \iff A^{-1}(AX) = A^{-1}(Y - B) \iff X = A^{-1}(Y - B)$$

  Cette équation admet une unique solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, donc M' admet un unique antécédent $M(x;y)$ par f. f est une transformation du plan.