



LOIS DISCRÈTES

I Variables aléatoires discrètes

- On appelle **variable aléatoire réelle** toute fonction à valeurs réelles définie sur Ω . Les variables aléatoires sont en général désignées par des majuscules comme X , Y ou Z .
- Une variable aléatoire est dite **discrète** lorsque l'ensemble des valeurs possibles est discret, c'est-à-dire uniquement constitué de valeurs ponctuelles isolées. En particulier, si X ne prend que des valeurs entières, X est une variable aléatoire réelle discrète. Évidemment, lorsque Ω est fini, toute variable aléatoire réelle est nécessairement finie donc discrète.

Définition

II Loi uniforme discrète

On dit que X suit une **loi uniforme discrète** sur l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ si pour tout entier i de $\{1, \dots, n\}$, on a : $P(X = i) = \frac{1}{n}$.

Définition

Exemple

- On lance un dé et on appelle X le résultat du lancer. Alors $P(X = 1) = P(X = 2) = \dots = P(X = 6) = \frac{1}{6}$. On dira que X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- On lance une pièce de monnaie. La probabilité d'obtenir « pile » est égale à la probabilité d'obtenir « face », toutes deux égales à $\frac{1}{2}$. Dans ce cas, X suit également une loi uniforme.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme discrète de paramètre n , alors :

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

Propriété

Démontrer la propriété précédente.

III Répétition d'expériences indépendantes

Plusieurs expériences sont identiques et indépendantes si :

- elles ont les mêmes issues,
- les probabilités de chacune des issues ne changent pas d'une expérience à l'autre.

Définition

Exemple

- On lance un dé plusieurs fois de suite et on note à chaque fois le résultat. On répète ainsi la même expérience (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre (un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer).
- Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète cette expérience 10 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.

Propriété

On considère une expérience aléatoire à deux issues A et B avec les probabilités $P(A)$ et $P(B)$. Si on répète l'expérience deux fois de suite de façon indépendante :

- la probabilité d'obtenir l'issue A suivie de l'issue B est égale à $P(A) \times P(B)$,
- la probabilité d'obtenir l'issue B suivie de l'issue A est égale à $P(B) \times P(A)$,
- la probabilité d'obtenir deux fois l'issue A est égale à $P(A)^2$
- la probabilité d'obtenir deux fois l'issue B est égale à $P(B)^2$.

Exercice :

On considère l'expérience suivante :

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.

- Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
- Déterminer la probabilité :
 - d'obtenir deux boules blanches ;
 - une boule blanche et une boule rouge ;
 - au moins une boule blanche.

IV Loi de Bernoulli

Définition

- On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire qui admet deux issues, l'une étant appelée arbitrairement « le succès », l'autre « l'échec ».
- Généralement, on désignera le succès par la lettre S et on notera $P(S) = p$. De plus, l'échec sera désigné par \bar{S} . On a alors $P(\bar{S}) = 1 - p$.
- On dit que X suit une **loi de Bernoulli de paramètre p** lorsque X prend la valeur 1 avec une probabilité p et prend la valeur 0 avec une probabilité $1 - p$.

Exemple

- Le jeu du pile ou face : On considère par exemple comme succès "obtenir pile" et comme échec "obtenir face". Ici $p = \frac{1}{2}$.
- On lance un dé et on considère par exemple comme succès "obtenir un six" et comme échec "ne pas obtenir un six". Ici $p = \frac{1}{6}$.

Propriété

Espérance et écart-type d'une loi de Bernoulli. Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , alors :

$$E(X) = p \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$$

Démontrer la propriété précédente.

V Schéma de Bernoulli, loi binomiale

- On dit qu'il y a répétition d'expériences aléatoires **identiques** lorsqu'une même expérience aléatoire est répétée plusieurs fois, dans les mêmes conditions.
- Des expériences aléatoires sont dites **indépendantes** lorsque le résultat de l'une quelconque d'entre elles est indépendant du résultat des autres expériences.

Définition

- On appelle **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p , toute répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p .
- Soit n, k des entiers naturels. On appelle coefficient binomial, on note $\binom{n}{k}$ et on lit « k parmi n » le nombre de chemins comportant k succès parmi n épreuves répétées dans un schéma de Bernoulli.

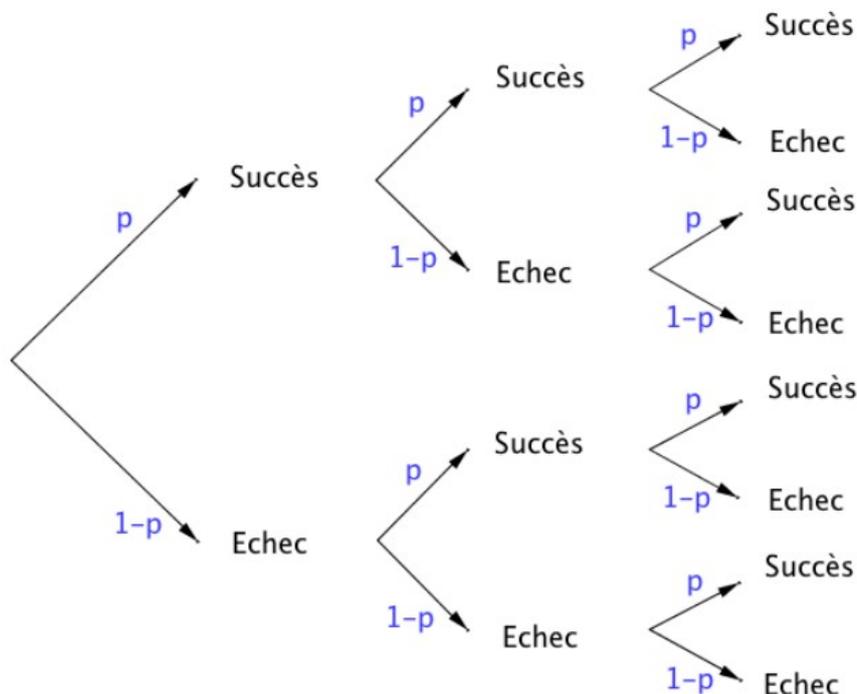
Définition

Exemple

La répétition de 10 lancers d'une pièce de monnaie est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$

n et p sont les paramètres de la loi binomiale et que l'on note $B(n; p)$.

On a représenté dans un arbre de probabilité les issues d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre p . X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.



Dans cet exemple, $P(X = 3) = p \times p \times p = p^3$. En effet, en suivant les branches sur le haut de l'arbre, on arrive à 3 succès.

On a également :

$$P(X = 1) = p \times (1 - p) \times (1 - p) + (1 - p) \times p \times (1 - p) + (1 - p) \times (1 - p) \times p = 3p(1 - p)^2$$

En effet, les chemins permettant la réalisation de 1 succès sont SEE, ESE et EES.

Pour tout entier naturel n :

$$\binom{n}{0} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{n} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{1} = n$$

- Il n'y a qu'un seul chemin correspondant à 0 succès parmi n épreuves : (Échec, Échec, ... , Échec)
- Il n'y a qu'un seul chemin correspondant à n succès parmi n épreuves : (Succès, Succès, ... , Succès)
- Il n'y a n chemins correspondant à 1 succès parmi n épreuves : (Succès, Échec, Échec, ... , Échec) (Échec, Succès, Échec, ... , Échec) (Échec, Échec, Succès, ... , Échec) ... (Échec, Échec, Échec, ... , Succès)

V.1 Utilisation de la calculatrice

On lance 7 fois de suite un dé à 6 faces. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que le dé affiche un nombre supérieur ou égal à 3.

- Quelle est la loi suivie par X ?
- Calculer la probabilité $P(X = 5)$
- Calculer la probabilité $P(X \leq 5)$
- Calculer la probabilité $P(X \geq 3)$
- Représenter graphiquement la loi suivie par X par un diagramme en bâtons.



Pour répondre aux questions b, c, d et e, il faudra lire le manuel de votre calculatrice ou faire quelques recherches.

Soit n et p deux entiers naturels non nuls, $0 \leq k \leq p$. On suppose que X suit une loi $B(n; p)$. Alors, $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Espérance et écart-type d'une loi binomiale : Si X suit une loi $B(n; p)$ alors :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Exemple

On lance 5 fois un dé à six faces. On considère comme succès le fait d'obtenir 5 ou 6. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de succès. Calculer l'espérance et l'écart type. Interpréter le résultat obtenu.

V.2 Coefficients binomiaux

Symétrie des coefficients binomiaux

Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$, on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Relation de Pascal

Pour tous entiers n et k , on a :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Le triangle de Pascal :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Diagram illustrating Pascal's triangle with highlighted cells and a formula:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Exemple

Calculer les coefficients binomiaux suivants :

a. $\binom{100}{1}$

c. $\binom{25}{24}$

e. $\binom{7}{2}$

b. $\binom{7}{6}$

d. $\binom{4}{2}$

f. $\binom{8}{3}$

Exemple

Une urne contient 5 boules gagnantes et 7 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 4 fois de suite une boule et de la remettre. On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre de tirages gagnants.

- Montrer que X suit une loi binomiale
- Déterminer la loi de probabilité de X
- Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules gagnantes.

VI Loi géométrique

Définition

On dit que X suit une **loi géométrique de paramètre p** lorsque X correspond au temps d'attente du premier succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p .

Pour signifier « X suit une loi géométrique de paramètre p », on peut simplement écrire : « X suit une loi $G(p)$ ».

Théorème

Une variable aléatoire réelle X suit une loi géométrique de paramètre p si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et si pour tout k entier naturel non nul, on a :

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie et on s'arrête dès qu'on obtient « pile », que l'on considère comme succès. La probabilité d'obtenir pour la première fois « pile » au troisième lancer est égale à :

$$P(X = 3) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

où X est la variable aléatoire qui compte le nombre d'essais nécessaires jusqu'au premier succès.

Propriété

Espérance d'une loi géométrique : si X suit une loi géométrique de paramètre p , alors on a :

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Exemple

Le « 4 » est un jeu qui se joue avec un dé. Dans la règle, il est écrit qu'on peut jouer continuellement en lançant le dé mais dès l'obtention d'un « 4 », le joueur n'a plus le droit de relancer le dé. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers de dés nécessaires jusqu'à l'obtention d'un « 4 ».

- Calculer $P(X = 3)$; $P(X \leq 3)$ et $P(X \leq 8)$.
- Calculer $E(X)$, interpréter ce résultat.
- A l'aide du tableur, représenter graphiquement les probabilités $P(X = k)$ pour k compris entre 1 et 20.

Une loi sans mémoire : si X suit une loi géométrique, alors on a pour tous entiers naturels non nuls k, t :

$$P_{(X>k)}(X > k + t) = P(X > t)$$

La loi de probabilité du temps d'attente du prochain succès ne dépend pas du nombre de succès passés. On dit que la loi géométrique est **sans mémoire**. C'est la seule loi discrète avec cette propriété.

Exemple

Si on lance une pièce de monnaie et que l'on considère comme succès « obtenir pile ». La probabilité d'obtenir un succès après le 15e lancer sachant qu'on n'a pas obtenu de succès pour les 10 premiers lancers est égale à la probabilité d'obtenir un succès après le 5e lancer.

Exemple

On considère que la probabilité qu'un couple donne naissance à un enfant gaucher est égale à 12 %.

Sachant qu'un couple a déjà un enfant droitier, quelle est la probabilité d'avoir un enfant gaucher à partir du 4e enfant ?