



# LOI BINOMIALE

Le mathématicien et physicien hollandais Christian Huygens introduit la notion d'espérance mathématiques dans un livre publié en 1657 et consacré aux probabilités; c'est le premier ouvrage jamais écrit sur ce thème. Pour nommer ce nouveau concept, il hésite entre les mots latins *spes* et *expectatio* signifiant respectivement *espoir* et *espérance*. Christian Huygens est également célèbre pour ses travaux sur la chute des corps, sur le pendule et pour son invention de l'horloge.

## I Rappels

- $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

Propriété

### Exemple

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85% des cas;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95% des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note respectivement  $M$  et  $T$  les événements « Être porteur de la maladie » et « Avoir un test positif ».

- Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif?
- Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade?

## II Épreuves indépendantes, successives

- Etant donné un univers muni d'une probabilité  $P$ , on dit que deux événements  $A$  et  $B$  sont **indépendants** si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

- Soit  $n$  un entier naturel  $n \geq 2$ ,  $A_1, A_2, \dots, A_n$   $n$  événements définis sur  $\Omega$ . On dit que ces événements sont **mutuellement indépendants**, si

$$\forall I \subset \llbracket 1; n \rrbracket, P\left(\bigcap_{k \in I} A_k\right) = \prod_{k \in I} P(A_k)$$

Définition

### Exemple

- On lance un dé plusieurs fois de suite et on note à chaque fois le résultat. On répète ainsi la même expérience (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre (un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer).
- Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète cette expérience 10 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.

### Exercice :

On considère l'expérience suivante :

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.

- Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
- Déterminer la probabilité :
  - d'obtenir deux boules blanches ;
  - une boule blanche et une boule rouge ;
  - au moins une boule blanche.

### Exemple

On lance un dé puis une pièce de 1 euro et on note à chaque fois le résultat.

Le résultat du lancer du dé n'influe pas sur le résultat du lancer de la pièce.

L'univers de la première épreuve est  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  et celui de la deuxième épreuve est  $\{Pile; Face\}$ .

Les issues de l'expérience aléatoire sont (1 ; Pile), (1 ; Face), (2 ; Pile), (2 ; Face), ... , (6 ; Pile), (6 ; Face)

### Exemple

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soit  $R$  l'événement " On tire un roi ".

Soit  $T$  l'événement " On tire un trèfle ".

- Montrer que  $R$  et  $T$  sont des événements indépendants.
- On ajoute deux jokers au jeu de cartes. Les événements  $R$  et  $T$  sont-ils indépendants ?

### Exemple

Dans une population, un individu est atteint par la maladie  $a$  avec une probabilité égale à 0,005 et par la maladie  $b$  avec une probabilité égale à 0,01.

On choisit au hasard un individu de cette population.

Soit  $A$  l'événement " L'individu a la maladie  $a$  ".

Soit  $B$  l'événement " L'individu a la maladie  $b$  ".

On suppose que les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants

- Calculer la probabilité qu'un individu soit atteint par les deux maladies.
- Calculer  $P(A \cup B)$  et interpréter le résultat.

### III Loi de Bernoulli

- On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire qui admet deux issues, l'une étant appelée arbitrairement « le succès », l'autre « l'échec ».
- Généralement, on désignera le succès par la lettre  $S$  et on notera  $P(S) = p$ . De plus, l'échec sera désigné par  $\bar{S}$ . On a alors  $P(\bar{S}) = 1 - p$ .
- On dit que  $X$  suit une **loi de Bernoulli de paramètre  $p$**  lorsque  $X$  prend la valeur 1 avec une probabilité  $p$  et prend la valeur 0 avec une probabilité  $1 - p$ .

Définition

#### Exemple

- Le jeu du pile ou face : On considère par exemple comme succès "obtenir pile" et comme échec "obtenir face". Ici  $p = \frac{1}{2}$ .
- On lance un dé et on considère par exemple comme succès "obtenir un six" et comme échec "ne pas obtenir un six". Ici  $p = \frac{1}{6}$ .

**Espérance et écart-type d'une loi de Bernoulli.** Si  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , alors :

$$E(X) = p \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$$

Propriété

**Démontrer la propriété précédente.**

### IV Schéma de Bernoulli, loi binomiale

- On dit qu'il y a répétition d'expériences aléatoires **identiques** lorsqu'une même expérience aléatoire est répétée plusieurs fois, dans les mêmes conditions.
- Des expériences aléatoires sont dites **indépendantes** lorsque le résultat de l'une quelconque d'entre elles est indépendant du résultat des autres expériences.

Définition

- On appelle **schéma de Bernoulli** de paramètres  $n$  et  $p$ , toute répétition de  $n$  épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre  $p$ .
- Soit  $n, k$  des entiers naturels. On appelle coefficient binomial, on note  $\binom{n}{k}$  et on lit «  $k$  parmi  $n$  » le nombre de chemins comportant  $k$  succès parmi  $n$  épreuves répétées dans un schéma de Bernoulli.

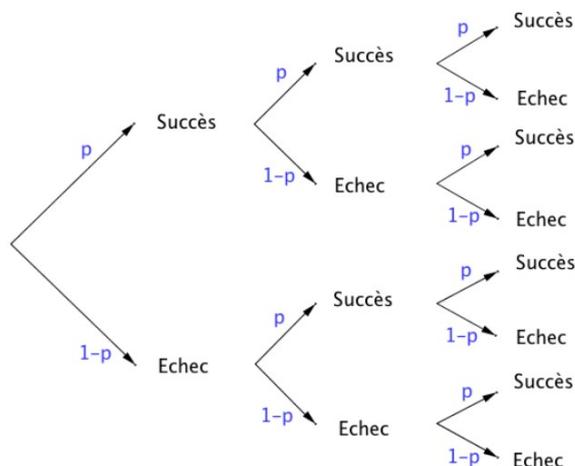
Définition

## Exemple

La répétition de 10 lancers d'une pièce de monnaie est un schéma de Bernoulli de paramètres  $n = 10$  et  $p = \frac{1}{2}$

$n$  et  $p$  sont les paramètres de la loi binomiale et que l'on note  $B(n; p)$ .

On a représenté dans un arbre de probabilité les issues d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre  $p$ .  $X$  est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.



Dans cette exemple,  $P(X = 3) = p \times p \times p = p^3$ . En effet, en suivant les branches sur le haut de l'arbre, on arrive à 3 succès.

On a également :

$$P(X = 1) = p \times (1 - p) \times (1 - p) + (1 - p) \times p \times (1 - p) + (1 - p) \times (1 - p) \times p = 3p(1 - p)^2$$

En effet, les chemins permettant la réalisation de 1 succès sont SEE, ESE et EES.

Pour tout entier naturel  $n$  :

$$\binom{n}{0} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{n} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{1} = n$$

- Il n'y a qu'un seul chemin correspondant à 0 succès parmi  $n$  épreuves : (Échec, Échec, ... , Échec)
- Il n'y a qu'un seul chemin correspondant à  $n$  succès parmi  $n$  épreuves : (Succès, Succès, ... , Succès)
- Il n'y a  $n$  chemins correspondant à 1 succès parmi  $n$  épreuves : (Succès, Échec, Échec, ... , Échec) (Échec, Succès, Échec, ... , Échec) (Échec, Échec, Succès, ... , Échec) ... (Échec, Échec, Échec, ... , Succès)

Remarque

### IV.1 Utilisation de la calculatrice

On lance 7 fois de suite un dé à 6 faces. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de fois que le dé affiche un nombre supérieur ou égal à 3.

- Quelle est la loi suivie par  $X$  ?
- Calculer la probabilité  $P(X = 5)$
- Calculer la probabilité  $P(X \leq 5)$
- Calculer la probabilité  $P(X \geq 3)$
- Représenter graphiquement la loi suivie par  $X$  par un diagramme en bâtons.



Pour répondre aux questions b, c, d et e, il faudra lire le manuel de votre calculatrice ou faire quelques recherches.

Soit  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls,  $0 \leq k \leq n$ . On suppose que  $X$  suit une loi  $B(n; p)$ . Alors,  $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$  et pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$ , on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Théorème

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $p$  un nombre réel appartenant à l'intervalle  $[0; 1]$ . Notons  $X$  la variable aléatoire suivant la loi binomiale  $B(n; p)$ . Soit  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , l'événement  $\{X = k\}$  est la réunion de tous les produits cartésiens constitués uniquement de  $k$  succès et  $(n - k)$  échecs comme par exemple :

$$A = S \times S \times \dots \times \bar{S} \times \bar{S}$$

On a donc  $P(A) = p^k \times (1 - p)^{n-k}$

Pour les autres événements constituant  $\{X = k\}$ , seul l'ordre d'apparition des succès et des échecs change. Il faut donc prendre en considération le nombre de choix de places possible pour les  $k$  succès parmi les  $n$  tentatives.

Finalement,  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

Démonstration

**Espérance et écart-type d'une loi binomiale** : Si  $X$  suit une loi  $B(n; p)$  alors :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$$

Propriété

### Exemple

On lance 5 fois un dé à six faces. On considère comme succès le fait d'obtenir 5 ou 6. On considère la variable aléatoire  $X$  donnant le nombre de succès. Calculer l'espérance et l'écart type. Interpréter le résultat obtenu.

### Exemple

Une urne contient 5 boules gagnantes et 7 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 4 fois de suite une boule et de la remettre. On appelle  $X$  la variable aléatoire qui associe le nombre de tirages gagnants.

- a. Montrer que  $X$  suit une loi binomiale
- b. Déterminer la loi de probabilité de  $X$
- c. Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules gagnantes.