Version 250423

2024/2025

Loi des grands nombres

Pafnouti **Tchebychev** (1821-1874), est le plus prestigieux des mathématiciens russes du XIX^e siècle. Il s'intéresse aux nombres premiers et démontre des résultats sur leur fréquence. Ce sont pourtant ses travaux dans le cadre du calcul des probabilités qui le rendent célèbre. Le premier, il démontre la loi des grands nombres dans un cadre général ; il le fait grâce à une inégalité démontrée par son ami français Jules **Bienaymé** (1796-1876) mais que le savant russe a popularisée. Tchebychev a formé dans son pays de nombreux mathématiciens en particulier Andreï **Markov** (1856-1922) connu pour ses résultats sur les processus aléatoires.

Dans cette séquence, $\Omega = \{\omega_1 \ ; \ \omega_2 \ ; \ ... \ ; \ \omega_r\}$ est un univers fini non vide.

I Première partie : sommes de variables aléatoires

I.1 Sommes de variables aléatoires

Exemple

On considère deux jeux dont les gains sont donnés :

- pour le premier jeu, par la variable aléatoire X qui prend les valeurs 1 et 2 (on gagne 1 euros ou on gagne 2 euros).
- pour le second jeu, par la variable aléatoire Y qui prend les valeurs -2, 3 et 4 (on perd 2 euros ou on gagne 3 euros ou on gagne 4 euros).

Par exemple, l'évènement $\{X = 1\} \cap \{Y = -2\}$ correspond à l'événement « le joueur gagne 1 euro au premier jeu et perd deux euros au second jeu ».

Considérons la variable aléatoire somme $S = X + Y$ donnant le gain total cumulé aux deux jeux.
Alors la variable aléatoire S peut prendre les valeurs : -1, 0, 4, 5 et 6.
En effet, on a par exemple $S = 0$ avec $\{X = 2\} \cap \{Y = -2\}$.

Par ailleurs, pour calculer par exemple, la probabilité de l'évènement $X + Y = 5$, on cherche toutes les sommes $X + Y$ égales à 5.
On a ainsi : $P(S = 5) = P(\{X = 1\} \cap \{Y = 4\}) + P(\{X = 2\} \cap \{Y = 3\})$.

Si de plus, les évènements X et Y sont **indépendants**, alors on a :

$$P(S = 5) = P(X = 1) \times P(Y = 4) + P(X = 2) \times P(Y = 3)$$

Définition

Soit X et Y deux variables aléatoires. **La loi de probabilité** de la variable aléatoire somme $X + Y$ est donnée par :

$$P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} P(\{X = i\} \cap \{Y = j\})$$

Définition

Deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur Ω sont dites **indépendantes** lorsque pour tout $(x\ ;\ y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(X = x) \times P(Y = y)$$

Exemple

On considère le jeu suivant qui se déroule en deux parties :

- La 1ère partie consiste à lancer une pièce de monnaie. Si on tombe sur « pile », on gagne 1 euro, si on tombe sur « face », on gagne 2 euros.
- La 2e partie consiste à lancer un dé à 6 faces. Si on tombe sur un chiffre pair, on gagne 1 euro, si on tombe sur le « 3 » ou le « 5 », on gagne 2 euros.
  Si on tombe sur le « 1 », on perd 5 euros.

  La variable aléatoire X désigne les gains à la 1ère partie, la variable aléatoire Y désigne les gains à la 2e partie.

  On considère que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

  Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire somme $S = X + Y$ donnant le gain total cumulé à la fin des deux parties.

I.2 Espérance, variance, et écart type d'une variable aléatoire réelle

Définition

Soit $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle d'univers image $X(\Omega) = \{x_1\ ;\ x_2\ ;\ ...\ ;\ x_m\}$. L'espérance de X est le nombre réel défini par :

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + ... + x_m P(X = x_m)$$

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur Ω et soit $X(\Omega) = \{x_1\ ;\ x_2\ ;\ ...\ ;\ x_m\}$ son univers image.

- **La variance** de X est

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = (x_1 - E(X))^2 P(X = x_1) + ... + (x_m - E(X))^2 P(X = x_m)$$

- **L'écart type** de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple

Calculer l'espérance et l'écart type du jeux suivant : On lance un dé cubique non pipé. Le joueur gagne 2 euros s'il obtient 2 ou 5, 10 euros s'il obtient 1 ou 6, il perd 9 euros s'il obtient 3 et 4.

Propriété

Formule de König-Huygens Soit X une variable aléatoire réelle,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Démonstration

Exercice 8 de la fiche d'exercices.

Propriété de l'espérance : Soit X et Y deux variables aléatoires réelles et a un nombre réel.

Additivité
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Homogénéité
$E(aX) = aE(X)$

Positivité
Si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$.

Propriété

Linéarité de l'espérance Soit X et Y deux variables aléatoires réelles, soit a et b deux nombres réels.

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Théorème

Soit X une variable aléatoire réelle et a un nombre réel,

$$V(aX + b) = a^2 V(X) \text{ et } \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$$

Propriété

$V(X+Y) \neq V(X) + V(Y)$ et $E(X \times Y) \neq E(X) \times E(Y)$

sauf si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes**.
Attention, la réciproque est fausse : $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ n'implique pas X et Y sont indépendantes.
Voir exercice 9 pour approfondissement.

Remarque

Exemple

Une entreprise qui fabrique des roulements à bille fait une étude sur une gamme de billes produites. Le diamètre théorique doit être égal à 1,3 cm mais cette mesure peut être légèrement erronée.
L'expérience consiste à tirer au hasard une bille d'un lot de la production et à mesurer son diamètre.
On considère la variable aléatoire X qui, à une bille choisie au hasard, associe son diamètre.
La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	1,298	1,299	1,3	1,301	1,302
$P(X = x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculer l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X.
On pourra utiliser la variable aléatoire $Y = 1000X - 1300$ pour simplifier les calculs.

I.3 Application à l'étude de la loi binomiale

Définition

On appelle **variable de Bernouilli** ou loi de Bernouilli la variable aléatoire X définie sur $\{S\ ;\ E\}$ telle que :

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = S \\ 0 & \text{si } \omega = E \end{cases}$$

Avec S le " succès " et E " l'échec ".

Exemple

On étudie la fiabilité d'un composant électronique. On appelle X la variable aléatoire égale à 1 si le composant électronique ne se détériore pas suite aux tests effectués et 0 dans le cas contraire.
Le fabricant précise que le composant électronique ne subit pas de détériorations suite aux tests dans $99,8\%$ des cas. Dans ce cas, la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,998.
On effectue les tests sur un échantillon de 100 composants électroniques prélevés au hasard dans le stock du fabricant.
On peut considérer alors que la liste $(X_1, X_2, ..., X_{100})$ forment un échantillon de taille 100 de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre 0,998.

Théorème

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernouilli de paramètre p.

- $E(X) = p$
- $V(X) = p(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$

Démonstration

Soit X une variable de Bernouilli de paramètre p.

- $E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$
- Formule de König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
  Les valeurs prises par $X(\omega)$ sont 0 ou 1 donc $X(\omega)^2 = X(\omega)$. D'où $V(X) = p - p^2 = p(1-p)$.
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p(1-p)}$

Remarque

Soit $X_1,\ X_2,\ ..., X_n$, n variables aléatoires indépendantes définies sur $\{S\ ;\ E\}^n$ suivant une loi de Bernouilli de même paramètre p. Comme chaque X_k ne peut prendre que la valeur 1 (en cas de succès) ou 0 (en cas d'échec), leur somme $S_n = X_1 + ... + X_n$ correspond au nombre de succès obtenus au cours de n expériences de Bernouilli indépendantes. Par conséquent, S_n suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Théorème

S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$ et de plus :

- $E(S_n) = np$
- $V(S_n) = np(1-p)$
- $\sigma(S_n) = \sqrt{np(1-p)}$

Démonstration

$S_n = X_1 + ... + X_n$ avec S_n une loi binomiale de paramètres n et p. On a donc $E(X_k) = p$, $V(X_k) = p(1-p)$ et $\sigma(X_k) = \sqrt{p(1-p)}$.

- Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = E(X_1 + ... + X_n) = E(X_1) + ... + E(X_n) = p + ... + p = np$
- Par indépendance des variables aléatoires X_k, $V(S_n) = V(X_1 + ... + X_n) = V(X_1) + ... + V(X_n) = p(1-p) + ... + p(1-p) = np(1-p)$
- $\sigma(Sn) = \sqrt{V(S_n)} = \sqrt{np(1-p)}$

Exemple

On lance 5 fois de suite un dé à six faces.
On considère comme succès le fait d'obtenir 5 ou 6.
On considère la variable aléatoire S donnant le nombre de succès.
Calculer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$.

II Deuxième partie : la loi des grands nombres

II.1 Moyenne d'un échantillon

Définition

Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de taille n de variables aléatoires.
On appelle **variable aléatoire moyenne** la variable aléatoire

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

Exemple

On lance un dé à six faces et on considère la variable aléatoire X qui prend la valeur 1 si le dé s'arrête sur un chiffre pair et la valeur 0 sinon.
On répète deux fois de suite cette expérience. On considère alors l'échantillon (X_1, X_2) de taille 2 de variables aléatoires X_1 et X_2 suivant la même loi que X.
Il est ainsi possible d'évaluer le résultat d'une telle expérience en étudiant la variable aléatoire moyenne de X_1 et X_2.
On appelle M_2 la variable aléatoire moyenne de l'échantillon (X_1, X_2).

a. Donner les valeurs prises par M_2
b. Donner alors la loi de probabilité de M_2.
c. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de M_2.
d. Comparer ses valeurs à l'espérance, la variance et l'écart type de X.

Propriété

Soit une variable aléatoire X et soit un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que X.

- $E(M_n) = E(X)$
- $V(M_n) = \frac{1}{n}V(X)$
- $\sigma(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X)$

Exemple

On considère la variable aléatoire X qui prend, de façon équiprobable, les valeurs -4, 0, 1, 3 et 6.
M_{50} est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille 50 de la loi de X.
Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de M_{50}.

II.2 Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Propriété

Inégalité de Markov Soit une variable aléatoire X à valeurs positives et δ un nombre réel strictement positif :

$$P(X \geq \delta) \leq \frac{E(X)}{\delta}$$

Théorème

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev Soit X une variable aléatoire et δ un nombre réel strictement positif.

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

Exemple

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,1$.

a. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 2\sigma(X)$. Interpréter.

b. Recommencer avec $\delta = 3\sigma(X)$, puis $\delta = 4\sigma(X)$. Que constate-t-on ?

c. (a) Simuler N valeurs de la variable aléatoire X par une fonction en Python dans le but d'estimer la probabilité $P(|X - 2| \geq 2\sigma(X))$.
On testera le programme pour différentes valeurs de N.

(b) Au regard des résultats obtenus par le programme, peut-on penser que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev a un caractère optimal ?

Propriété

Soit X une variable aléatoire, d'espérance μ, d'écart type $\sigma > 0$. Alors, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

II.3 Inégalité de concentration et loi des grands nombres

Théorème

Inégalité de concentration Soit n un entier naturel non nul et $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi d'espérance μ et de variance V, M_n leur variable aléatoire moyenne. Alors pour tout nombre réel strictement positif δ :

$$P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$$

Exemple

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,2.
On considère un échantillon de n variables aléatoires suivant la loi de X.
On appelle M_n la variable aléatoire moyenne associée à cet échantillon.
Déterminer la taille n de l'échantillon tel que la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle $]0,03\ ;\ 0,37[$ soit supérieure à 0,95.

Théorème

Loi des grands nombres Soit n un entier naturel non nul et $X_1,\ X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi d'espérance μ et de variance V. M_n désigne leur variable aléatoire moyenne. Alors pour tout nombre δ strictement positif.

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0$$

Remarque

La loi des grands nombres traduit le fait que plus la taille de l'échantillon d'une variable aléatoire X est grande, plus l'écart entre la moyenne de cet échantillon et l'espérance de la variable aléatoire X est faible.

Exemple

Soit une variable aléatoire X d'espérance 3 et de variance 0,2.
Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.

a. Déterminer un majorant de $P(|M_n - 3| \geq 0,1)$ pour $n = 100$, pour $n = 1000$, puis pour $n = 10000$. Que constate-t-on ?
b. Démontrer et interpréter le résultat précédent.

Exemple

On considère la variable aléatoire X qui prend ses valeurs de manière équiprobable parmi les entiers 1 à 5.
Et on nomme M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.

a. Simuler 500 valeurs de la variable aléatoire M_n par une fonction en Python dans le but d'estimer la probabilité $P(|M_n - E(X)| \geq \delta)$.
   Tester le programme pour différentes valeurs de δ et des valeurs de n de plus en plus grande.
b. Que constate-t-on ?
c. Justifier et interpréter ce résultat.