



# LOGIQUE

La langue française peut parfois être ambiguë. Prenons l'exemple de la conjonction « ou » ; au restaurant « fromage ou dessert » signifie l'un ou l'autre mais pas les deux. Par contre si dans un jeu de carte on cherche « les as ou les cœurs » alors il ne faut pas exclure l'as de cœur. Autre exemple : que répondre à la question « As-tu 5 euros en poche ? » si l'on dispose de 15 euros ? Les mathématiques sont un langage permettant de s'exprimer de manière rigoureuse, adapté aux phénomènes complexes, qui rend les calculs exacts et vérifiables. Le raisonnement est le moyen de valider — ou d'infirmer — une hypothèse et de l'expliquer à autrui.

## I Notion d'ensemble

### I.1 Langage des ensembles

Un ensemble est une collection d'objets, appelés éléments. Il est toujours possible de dire avec certitude si un élément appartient ou non à l'ensemble.

Pour exprimer le fait qu'un élément  $x$  appartient à un ensemble  $E$ , on écrit  $x \in E$ . Si  $x$  n'appartient pas à l'ensemble  $E$ , on écrit  $x \notin E$ .

- Pour décrire un ensemble, on peut écrire ses éléments entre deux accolades en les séparant par des points-virgules. On dit alors que l'ensemble est défini **en extension**.  
Par exemple  $\{0 ; 2 ; 3 ; 7 ; 9\}$   
Lorsque la liste est trop longue ou infinie, il n'est pas possible de définir l'ensemble en extension.
- Un autre type de description consiste à décrire l'ensemble à l'aide d'une propriété caractérisant les éléments de l'ensemble. On dit alors que l'ensemble est défini **en compréhension**.  
Par exemple, l'ensemble des diviseurs de 25 s'écrit  $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divise } 25\}$
- Un troisième type de description consiste à décrire un ensemble à l'aide d'une fonction. On dit alors que l'ensemble est défini comme **image directe**.  
Par exemple, l'ensemble des entiers naturels pairs s'écrit  $\{2n ; n \in \mathbb{N}\}$

Il existe plusieurs ensembles particuliers à connaître :

- l'ensemble vide est l'ensemble ne contenant aucun élément. On le note  $\{\}$  ou  $\emptyset$ .
- Un singleton est un ensemble contenant un seul élément. Par exemple  $\{2\}$  est un singleton.
- Une paire est un ensemble contenant deux éléments. Par exemple  $\{5 ; 7\}$ .

Un ensemble  $A$  est un sous-ensemble de  $E$  (ou une partie de  $E$ ) si tout élément de  $x \in A$  est élément de  $E$ .

On dit aussi que  $A$  est inclus (ou contenu) dans  $E$ . On note alors  $A \subset E$ .

Par exemple  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

La négation de  $A \subset E$  est  $A \not\subset E$ . Cela signifie qu'au moins un élément de  $A$  n'appartient pas à  $E$ .

## I.2 Construction d'ensemble

Soit  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles d'un ensemble  $E$ .

### Intersection

L'intersection de deux ensembles  $A$  et  $B$  est l'ensemble des éléments qui appartiennent à  $A$  **et** à  $B$  et se note  $A \cap B$ .

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

### Réunion

La réunion de deux ensembles  $A$  et  $B$  est l'ensemble des éléments qui appartiennent à  $A$  **ou** à  $B$  et se note  $A \cup B$ .

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

### Ensembles disjoints

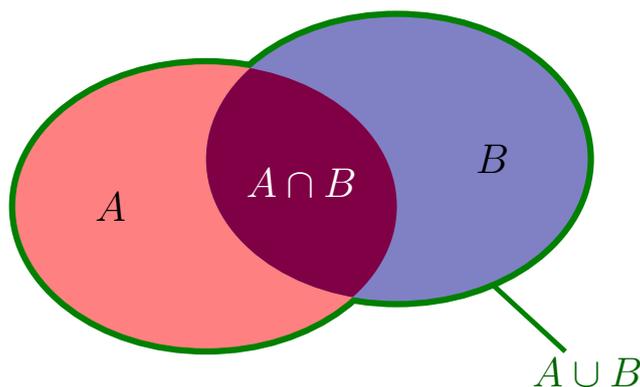
On dit que deux ensembles sont disjoints lorsqu'ils n'ont aucun élément en commun.

$$A \cap B = \emptyset$$

### Complémentaire

Le complémentaire de  $A$  dans  $E$ , noté  $\bar{A}$  ou  $E \setminus A$  ou  $\mathcal{C}_E^A$ , est le sous-ensemble de  $E$  formé des éléments de  $E$  qui n'appartiennent pas à  $A$ .

$$\bar{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$$



D'après **les lois de Morgan**, on a :

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

## II Éléments de logique

- Une proposition (ou assertion) est un énoncé dont on peut dire avec certitude qu'il est vrai ou faux.
- La négation d'une proposition  $\mathcal{P}$ , notée (non  $\mathcal{P}$ ) ou  $\overline{\mathcal{P}}$ , est une nouvelle proposition obtenue en niant la proposition  $\mathcal{P}$ .  
Par exemple, la négation de « 3 est un nombre pair » est « 3 n'est pas un nombre pair ».
- La conjonction des propositions  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ , notée «  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  », est une nouvelle proposition qui est vraie lorsque  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont toutes les deux vraies, et dans ce cas seulement.  
Par exemple, la conjonction de « 11 est un nombre premier » et « 11 est un nombre impair » est vraie.

Table de vérité :

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	F	F

- La disjonction des propositions  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ , notée «  $\mathcal{P}$  ou  $\mathcal{Q}$  », est une nouvelle proposition qui est fautive lorsque  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont toutes les deux fautes, et dans ce cas seulement.  
Par exemple, la disjonction de « 11 est un nombre premier » et « 11 est un nombre pair » est vraie. Table de vérité :

$P \setminus Q$	V	F
V	V	V
F	V	F

- L'implication des propositions  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ , notée «  $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$  », est une nouvelle proposition.  
Par exemple, « s'il pleut, alors il y a des nuages » est vraie. Table de vérité :

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	V	V

Dans l'implication  $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ , on dit que  $\mathcal{P}$  est une condition suffisante pour  $\mathcal{Q}$ . En revanche, on dit que  $\mathcal{Q}$  est une condition nécessaire pour  $\mathcal{P}$ .

- L'implication  $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$  est appelée réciproque de l'implication  $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ .
- Lorsque la réciproque est également vraie, on dit que les propositions sont équivalentes et on note  $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$  Table de vérité :

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	F	V

- L'implication  $\text{non}(\mathcal{Q}) \implies \text{non}(\mathcal{P})$  est appelée contraposé de l'implication  $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ .

Remarque

### III Quelques règles de base de la logique

Nous utiliserons l'axiome (c'est-à-dire une proposition indémontrable utilisée comme fondement d'une théorie mathématique) suivant :

« Quelle que soit la proposition  $\mathcal{P}$ , l'une des deux propriétés  $\mathcal{P}$  et  $(\text{non } \mathcal{P})$ , et l'une seulement, est vraie. »

Propriété

- Si  $\mathcal{P}$  est une proposition vraie et si  $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ , alors  $\mathcal{Q}$  est vraie.
- Si la conjonction  $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$  et  $(\mathcal{Q} \implies \mathcal{R})$  est vraie, alors  $(\mathcal{P} \implies \mathcal{R})$  est vraie.
- Pour toute proposition  $\mathcal{P}$ ,  $\text{non}(\text{non } \mathcal{P})$  équivaut à  $\mathcal{P}$ .
- Toute implication est équivalente à sa contraposée.

### IV Quantificateurs

Définition

Un prédicat à une variable astreint à un ensemble  $E$  est une expression de la forme  $\mathcal{P}(x)$  qui devient, chaque fois que l'on assigne à  $x$  une valeur dans  $E$ , soit une proposition vraie, soit une proposition fausse.

Par exemple,  $\mathcal{P}(x) : "x^2 > x"$  est un prédicat vrai si  $x > 1$  ou  $x < 0$  et faux sinon.

Définition

- Lorsque pour toute valeur de  $x$  dans  $E$ , le prédicat  $\mathcal{P}(x)$  est vrai, on note :

$$\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$$

- Lorsqu'il existe (au moins) une valeur de  $x$  dans  $E$  pour laquelle le prédicat  $\mathcal{P}(x)$  est vrai, on note :

$$\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$$

Remarque

La notion de prédicat à une variable s'étend également à la notion de prédicat à plusieurs variables. Dans le cas d'un prédicat à deux variables, le prédicat sera précédé par deux quantificateurs :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid x + y = x^3 + y^3$$

On ne peut pas intervertir les quantificateurs sans changer le sens de la proposition !



$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid x + y = x^3 + y^3 \text{ est vrai}$$

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \mid x + y = x^3 + y^3 \text{ est faux}$$

## V Négation d'une proposition logique

### Lois de Morgan :

- $\text{non}(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q})$  équivaut à  $(\text{non}(\mathcal{P}) \text{ ou } \text{non}(\mathcal{Q}))$
- $\text{non}(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q})$  équivaut à  $(\text{non}(\mathcal{P}) \text{ et } \text{non}(\mathcal{Q}))$

Propriété

### Exemple

La négation de  $(x < -1 \text{ ou } x > 1)$  est  $(x \geq -1 \text{ et } x \leq 1)$ .

### Négation d'une propriété :

$$\text{non}(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \text{ équivaut à } (\text{non}(\mathcal{Q}) \text{ et } \mathcal{P})$$

Propriété

### Exemple

La négation de l'implication « S'il y a des nuages, alors il pleut » s'écrit « Il y a des nuages et il ne pleut pas ».

### Exemple

Quelques questions :

- Écrire la table de vérité du « ou exclusif ». (C'est le ou dans la phrase « fromage ou dessert », l'un ou l'autre mais pas les deux.)
- Écrire la table de vérité de « non ( $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ ) ». Que remarquez vous ?
- Écrire la négation de «  $\mathcal{P} \implies \text{non}(\mathcal{Q})$  ».
- Écrire la négation de «  $\mathcal{P}$  et ( $\mathcal{Q}$  ou  $\mathcal{R}$ ) ».

## VI Négation d'une proposition écrite à l'aide de quantificateurs

- $\exists x \in E, \text{non}(\mathcal{P}(x))$  est la négation de  $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$
- $\forall x \in E, \text{non}(\mathcal{P}(x))$  est la négation de  $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$

Propriété

Quand on écrit «  $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$  » cela signifie juste qu'il existe un réel pour lequel  $f$  s'annule. Rien ne dit que ce  $x$  est unique. Dans un premier temps vous pouvez lire la phrase ainsi : « il existe au moins un réel  $x$  tel que  $f(x) = 0$  ». Afin de préciser que  $f$  s'annule en une unique valeur, on rajoute un point d'exclamation :

$$\exists ! x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$$

Remarque

## VII Raisonnement usuels

### VII.1 Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion «  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$  » est vraie. On suppose que  $\mathcal{P}$  est vraie et on montre qu'alors  $\mathcal{Q}$  est vraie. C'est la méthode à laquelle vous êtes le plus habitué.

#### Exemple

Montrer que si  $a, b \in \mathbb{Q}$  alors  $a + b \in \mathbb{Q}$ .

### VII.2 Disjonction des cas

Si l'on souhaite vérifier une assertion  $\mathcal{P}(x)$  pour tous les  $x$  dans un ensemble  $E$ , on montre l'assertion pour les  $x$  dans une partie  $A$  de  $E$ , puis pour les  $x$  n'appartenant pas à  $A$ . C'est la méthode de disjonction ou du cas par cas.

#### Exemple

Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$ .

### VII.3 Contraposée

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence entre une implication et sa contraposée. On montre alors la contraposée pour montrer la proposition.

#### Exemple

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que si  $n^2$  est pair alors  $n$  est pair.

### VII.4 Absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer «  $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$  » repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que  $\mathcal{P}$  est vraie et que  $\mathcal{Q}$  est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si  $\mathcal{P}$  est vraie alors  $\mathcal{Q}$  doit être vraie et donc «  $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$  » est vraie.

#### Exemple

Soit  $a, b \geq 0$ . Montrer que si  $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$  alors  $a = b$ .

### VII.5 Contre exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type «  $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$  » est vraie alors pour chaque  $x$  de  $E$  il faut montrer que  $\mathcal{P}(x)$  est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver  $x \in E$  tel que  $\mathcal{P}(x)$  soit fausse. Trouver un tel  $x$  c'est trouver un contre-exemple à l'assertion  $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ .

### Exemple

Montrer que l'assertion suivante est fausse « Tout entier positif est somme de trois carrés ».

Il existe également le raisonnement par récurrence qui utilise le principe des dominos sur les entiers naturels : il suffit de savoir qu'un domino tombe et que lorsque un domino tombe il fait tomber le suivant pour démontrer que tous les dominos tombent. Ce raisonnement sera étudié en spécialité de terminale.

Remarque