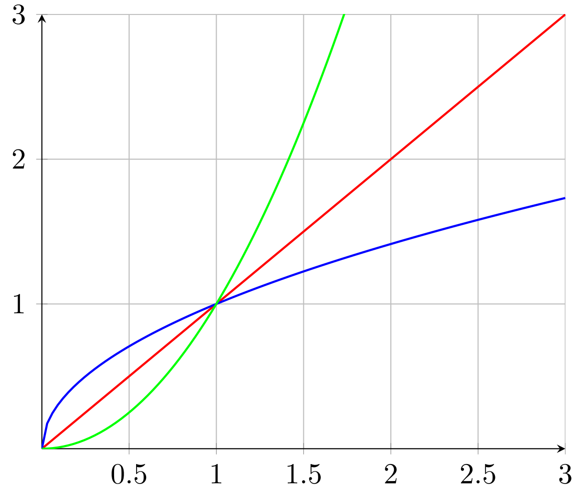
2022/2023

Le logarithme népérien

I Les fonctions réciproques

Soit les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ définies sur $\mathbb{R}_+$.



Il est possible de constater que ces fonctions sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Ces fonctions sont réciproques l'une de l'autre :

$$\sqrt{x}^2 = x$$

Propriété

- Soit une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle. On appelle fonction réciproque de f, la fonction g telle que : $f(a) = b \longleftrightarrow g(b) = a$ avec a et b deux nombres appartenant respectivement à l'intervalle de définition de f et de g.
- Les courbes représentatives de deux fonctions réciproques sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

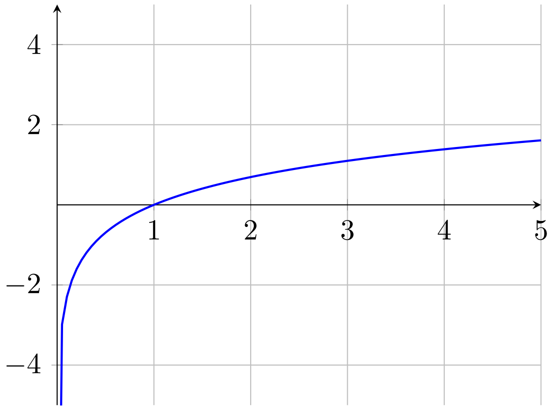
Exemple

Déterminer la fonction réciproque de $f(x) = 3x - 1$ ainsi que son intervalle de défintion.

II Présentation du logarithme népérien

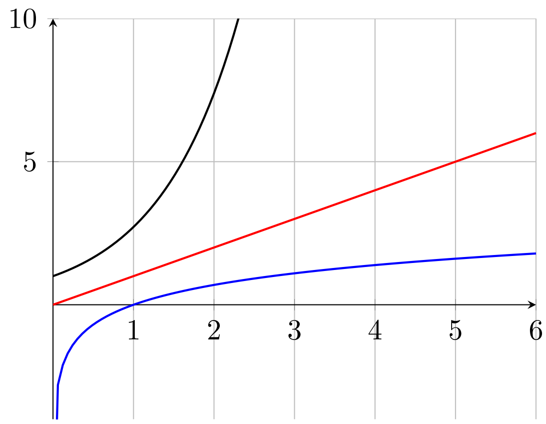
Définition

Pour tous réel $a \in]0;+\infty[$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
On appelle logarithme népérien d'un réel strictement positif a, l'unique solution de l'équation $e^x = a$. On le note $\ln(a)$.
La fonction logarithme népérien est définie sur $]0;+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.



Remarque

- Les fonctions exponentielles et logarithme népérien sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.
- Les courbes représentatives de ces deux fonctions sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
- Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée log est définie par : $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$



Propriété

On a donc les propriétés suivantes :

a. Pour $x > 0$, $\quad e^{\ln(x)} = x$.

b. $\ln(1) = 0 \quad ; \quad \ln(e) = 1 \quad ; \quad \ln(\frac{1}{e}) = -1$

c. $\ln(e^x) = x$

d. Pour $x > 0$, $\quad e^{\ln(x)} = x$

III Les propriétés du logarithme népérien

Théorème

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

Conséquences :

- $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$
- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$ avec $n \in \mathbb{N}$
- $\ln(a^x) = x\ln(a)$ avec $x \in \mathbb{R}$

Exemple

Simplifier les expressions suivantes :

a. $A = \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$

b. $B = 3\ln(2) + \ln(5) - 2\ln(3)$

c. $C = \ln(e^2) - \ln(\frac{2}{e})$

Propriété

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

$\ln(a) = \ln(b) \longleftrightarrow a = b$

$\ln(a) < \ln(b) \longleftrightarrow a < b$

Exemple

Résoudre les équations et inéquations suivantes dans I :

a. $\ln(x) = 2$ avec $I =]0;+\infty[$

b. $e^{x+1} = 5$ avec $I = \mathbb{R}$

c. $3\ln(x) - 4 = 8$ avec $I =]0;+\infty[$

d. $\ln(6x-1) \geq 2$ avec $I =]\frac{1}{6};+\infty[$

e. $e^x + 5 > 4e^x$ avec $I = \mathbb{R}$

IV La fonction logarithme népérien

Propriété

- La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ sa dérivée est $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- Soit u une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, la dérivée de $\ln(u)$ est $\frac{u'}{u}$.

Exemple

a. Dériver la fonction suivante sur $]0;+\infty[$: $y = \frac{\ln(x)}{x}$

b. Dériver la fonction g définie sur $]0;2[$ par $g(x) = \ln(2x - x^2)$.

Propriété

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Dresser le tableau de variations de la fonction logarithme népérien.

Les limites aux bornes sont : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$

Exemple

Déterminer les variations de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 3 - x + 2\ln(x)$.

Exemple

Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation $y = x$.

Exemple

Trouver le seuil d'une suite géométrique :
On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 5 \times 2^n$.
Déterminer le rang n à partir duquel $u_n \geq 10^6$.