Version 250127

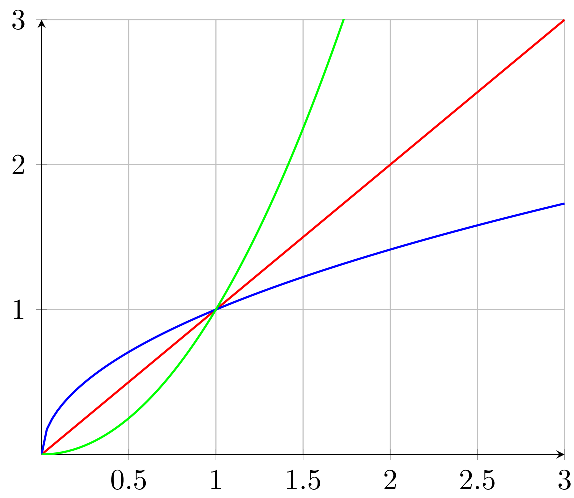
2024/2025

Logarithme népérien

Henry Briggs est un mathématicien et astronome anglais qui travaille à Londres puis Oxford. Dès qu'il apprend la découverte des logarithmes par **John Napier** en 1614, il se rend à Edimbourg où il rencontre Napier à deux reprises et le convainc d'adopter des logarithmes de base dix. Il a en effet compris leur intérêt pour effectuer de grands calculs, si utiles en astronomie. Encore fallait-il dresser des tables donnant les logarithmes des nombres avec une grande précision. Il se lance dans cette tâche considérable. Il en publie une première avec six décimales en 1617, avec quatorze en 1624, suivie d'une table à quinze décimales pour les fonctions trigonométriques et ce, pour chaque centième de degré !

I Les fonctions réciproques

Soit les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ définies sur $\mathbb{R}_+$.



Il est possible de constater que ces fonctions sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Ces fonctions sont réciproques l'une de l'autre :

$$\sqrt{x}^2 = x$$

Propriété

- Soit une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle. On appelle fonction réciproque de f, la fonction g telle que : $f(a) = b \longleftrightarrow g(b) = a$ avec a et b deux nombres appartenant respectivement à l'intervalle de définition de f et de g.
- Les courbes représentatives de deux fonctions réciproques sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

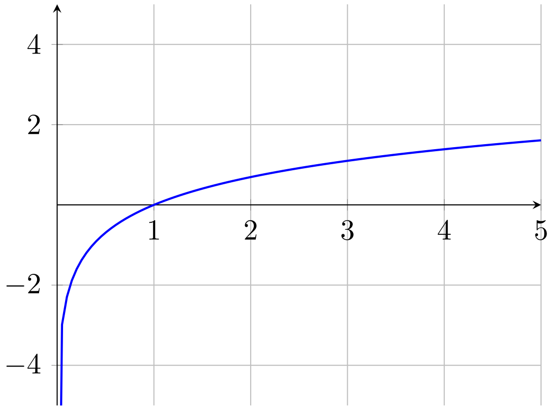
Exemple

Déterminer la fonction réciproque de $f(x) = 3x - 1$ ainsi que son intervalle de définition.

II Présentation du logarithme népérien

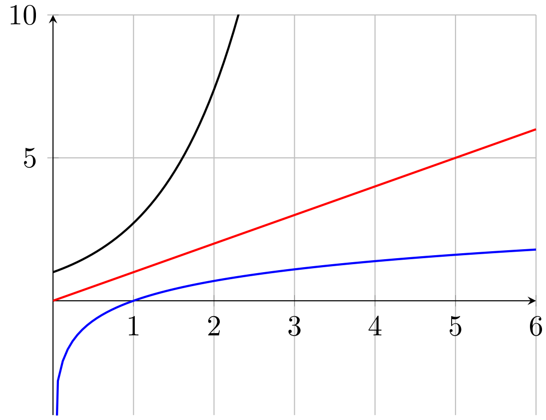
Définition

Pour tous réel $a \in]0;+\infty[$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
On appelle logarithme népérien d'un réel strictement positif a, l'unique solution de l'équation $e^x = a$. On le note $\ln(a)$.
La fonction logarithme népérien est définie sur $]0;+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.



Remarque

- Les fonctions exponentielles et logarithme népérien sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.
- Les courbes représentatives de ces deux fonctions sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
- Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée log est définie par : $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$



Propriété

On a donc les propriétés suivantes :

- Pour $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.
- $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$; $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = -1$
- Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $\ln(e^x) = x$

Nous allons démontrer à l'aide de la fonction exponentielle que :

$\ln(1) = 0 \quad ; \quad \ln(e) = 1 \quad ; \quad \ln(\frac{1}{e}) = -1$

- $\ln(e^0) = \ln(1) = 0$ car $\ln(e^x) = x$ par définition.
- $\ln(e) = \ln(e^1) = 1$
- $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(e^{-1}) = -1$

Démonstration

III Les propriétés du logarithme népérien

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a

- $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$
- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$ avec $n \in \mathbb{N}$
- $\ln(a^x) = x\ln(a)$ avec $x \in \mathbb{R}$

Théorème

Nous allons démontrer les propriétés suivantes :

$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

$$e^{\ln(a\times b)} = a \times b = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$$

$\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$

$$\ln\left(\frac{1}{a} \times a\right) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln(a) = \ln(1) = 0 \text{ donc } \ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$$

$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln(\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

Démonstration

Exemple

Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, la proposition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(a^n) = n\ln(a)$$

Exemple

Simplifier les expressions suivantes :

a. $A = \ln(3 - \sqrt{5}) + \ln(3 + \sqrt{5})$

b. $B = 3\ln(2) + \ln(5) - 2\ln(3)$

c. $C = \ln(e^2) - \ln(\frac{2}{e})$

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

$\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$

$\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$

Propriété

Exemple

Résoudre les équations et inéquations suivantes dans I :

a. $\ln(x) = 2$ avec $I =]0; +\infty[$
b. $e^{x+1} = 5$ avec $I = \mathbb{R}$
c. $3\ln(x) - 4 = 8$ avec $I =]0; +\infty[$
d. $\ln(6x-1) \geq 2$ avec $I =]\frac{1}{6}; +\infty[$
e. $e^x + 5 > 4e^x$ avec $I = \mathbb{R}$

Exemple

a. Résoudre l'inéquation $e^x + 5 > 4e^x$
b. Résoudre l'inéquation $\ln(6x-1) \geq 2$
c. Résoudre, dans un intervalle I à déterminer, l'inéquation suivante

$$\ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0$$

IV La fonction logarithme népérien

Propriété

La fonction logarithme népérien est dérivable (donc continue) sur $]0; +\infty[$ sa dérivée est

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

Démonstration

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ tel que $f(x) = e^{u(x)}$ où u est une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = \ln(x)$, donc dérivable sur $]0; +\infty[$..
Par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition est pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = u'(x)x = 1$ car $f'(x) = 1$.
D'où $u'(x) = \frac{1}{x}$.

Propriété

- La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
- La fonction logarithme népérien est concave sur $]0; +\infty[$
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Exemple

a. Dériver la fonction suivante sur $]0; +\infty[$: $y = \frac{\ln(x)}{x}$

b. Dériver la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{\ln(x)^2}{x}$.

Exemple

Déterminer les variations de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 3 - x + 2\ln(x)$.

Exemple

Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation $y = x$.

Théorème des croissances comparées :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln(x) = 0$

Théorème

Nous ne traiterons ici que le cas $n = 1$.
Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
Posons $y(x) = \ln(x)$. Or, par croissances comparées entre y et e^y au voisinage de $+\infty$, nous savons que $\dfrac{y}{e^y}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
Par composition, il s'ensuit que $\dfrac{y(x)}{e^{y(x)}}$ tend vers 0 en $+\infty$, c'est à dire que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{e^{\ln(x)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Montrons que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$
Or $\lim\limits_{x\to-\infty} ye^y = 0$. Par composition des limites,

$$\lim_{x\to 0} y(x)e^{y(x)} = \lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$$

Démonstration

Exemple

Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln(x)$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{(x^2+1)\ln(x)}$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et à valeurs strictement positives. la fonction f définie par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I, et :

$$\text{Pour tout réel } x \in I,\ f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Propriété

Exemple

Dériver la fonction f définie sur $]0;2[$ par $f(x) = \ln(2x - x^2)$.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $]-2;1[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$$

a. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations des asymptotes à la courbe.

b. Déterminer le sens de variations de la fonction f.

c. Tracer la courbe représentative de f.

Théorème

Comportement en 1

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$

Exemple

Trouver le seuil d'une suite géométrique :
On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 5 \times 2^n$.
Déterminer le rang n à partir duquel $u_n \geq 10^6$.