Version 230816

2023/2024

Limite de fonction

Souvent surnommé le père de l'analyse moderne **Karl Weierstrass** est un mathématicien atypique. Il n'obtient un poste à l'université qu'à l'âge de quarante-neuf ans. Il est pourtant investi dans les recherches mathématiques dès la fin de ses études. Il donne une définition de la notion de limite ainsi que de celle de continuité très proches de celles que nous utilisons aujourd'hui. Il publie très peu et ses découvertes sont connues aujourd'hui grâce à ses élèves.

I Limite à l'infini

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$. On dit que

f a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$
et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ lorsque tout intervalle ouvert centré en ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pourvu que x soit assez grand.

f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$
et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pourvu que x soit assez grand.

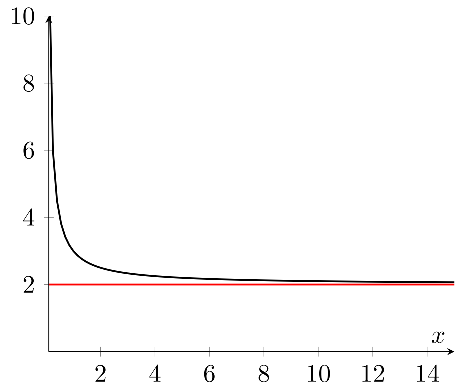
f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$
et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty, B[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pourvu que x soit assez grand.

Remarque

- On note indifféremment $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x)$
- On a des définitions analogues pour les limites réelles ou infinie en $-\infty$.
- Lorsque f tend vers 0 en x_0 en gardant un signe positif (respectivement négatif), on note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ (respectivement $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0^-$).

Exemple

On a représenté en noir ci-contre la fonction f définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;15]$. En rouge, on a représenté la fonction constante $y = 2$.
On constate que la fonction f se rapproche rapidement de la droite. Autrement dit, la distance entre la droite et la courbe représentative de f tend vers 0 lorsque x grandit.
On dit alors que la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$ est 2.



Définition

- La droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.
- La droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

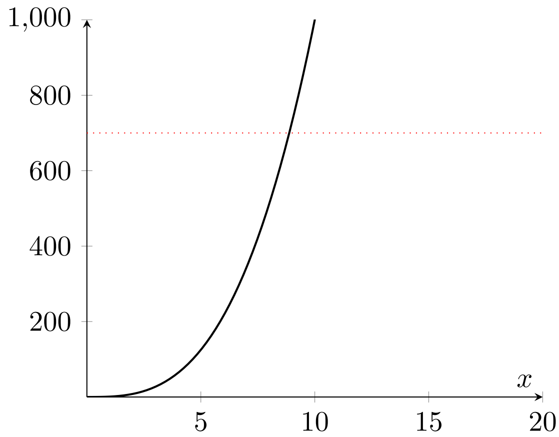
Remarque

Dans l'exemple ci-dessus, l'asymptote horizontale de f en $+\infty$ est $y = 2$.
On constate que la courbe se rapproche donc de son asymptote horizontale en $+\infty$.

I.1 Limite infinie

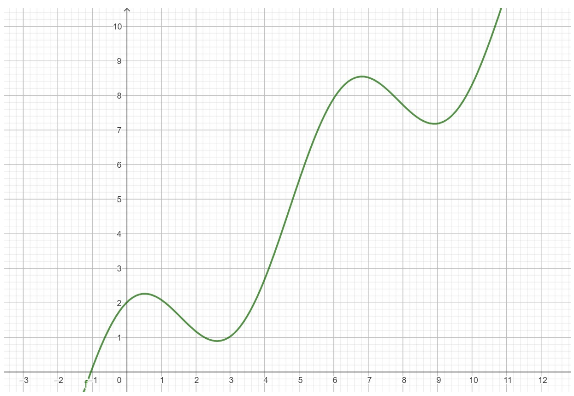
Exemple

On a représenté en noir ci-contre la fonction f définie par $f(x) = x^3$ sur l'intervalle $[0; 20]$.
On constate que quelque soit le réel A choisit, il est possible de trouver un x tel que $f(x)$ soit plus grand que A.



Remarque

- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas obligatoirement croissante !
  Voici un exemple ci-dessous avec $f(x) = 2\cos(x) + x$:



- Certaine fonction n'ont pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$, c'est le cas par exemple pour les fonction $y = \cos(x)$ et $y = \sin(x)$.

II Limite en un réel

Soit f une fonction définie sur D_f et $x_0 \in \mathbb{R}$ une extrémité réelle de D_f. On dit que

f a pour limite $+\infty$ en x_0

et on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pourvu que x soit suffisamment proche de x_0 dans D_f.

f a pour limite $-\infty$ en x_0

et on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty; B[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pourvu que x soit suffisamment proche de x_0 dans D_f.

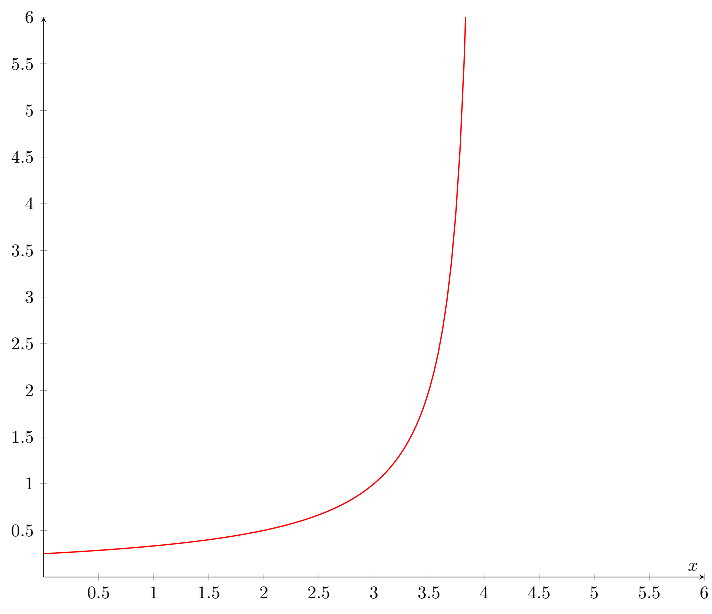
f a pour limite ℓ en x_0

et on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ lorsque tout intervalle ouvert centré sur ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pourvu que x soit suffisamment proche de x_0.

Définition

Exemple

On a représenté en rouge ci-dessous la fonction f définie sur $\mathbb{R} \backslash \{4\}$ par $f(x) = -\frac{1}{x-4}$.
On constate que la fonction f tend vers $+\infty$ lorsque x se rapproche de 4.

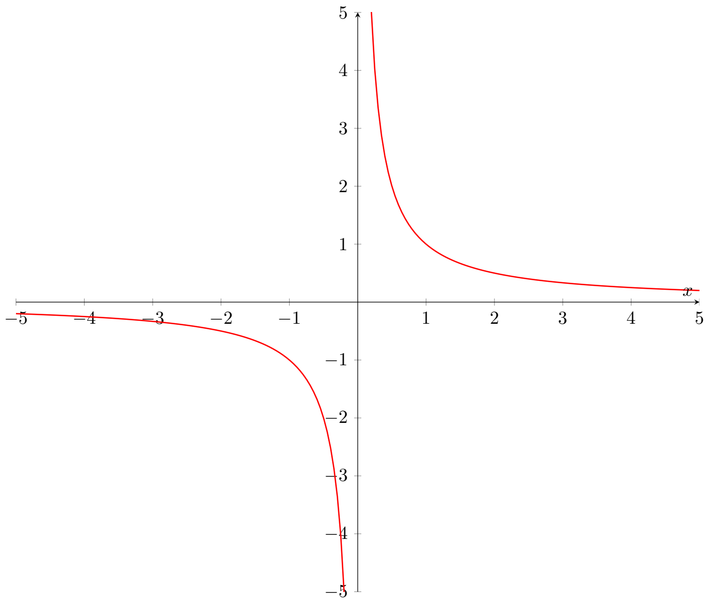


- La droite d'équation $x = A$ avec $A \in \mathbb{R}$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f en A si $\lim\limits_{x \to A} f(x) = +\infty$.
- La droite d'équation $x = A$ avec $A \in \mathbb{R}$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f en A si $\lim\limits_{x \to A} f(x) = -\infty$.

Définition

Remarque

Certaines fonctions n'ont pas la même limite à " droite " ou à " gauche " de A.
Par exemple, la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ a une limite à gauche de 0, et une limite à droite de 0 :



$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

III Limites des fonctions usuelles

III.1 Limites à connaître

Théorème

Soit f une fonction usuelle c'est à dire une fonction polynomiale, la fonction racine carrée, la fonction exponentielle, la fonction sinus ou la fonction cosinus, et $x_0 \in D_f$ un élément du domaine de définition de f. Alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Propriété

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
- Si n est pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$
- Si n est impair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Théorème

- Si n est un entier strictement positif pair, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$
- Si n est un entier strictement positif impair, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$

IV Opérations sur les limites

Somme de limites : $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) + g(x)$

Soit L, la limite de la suite $f(x)$, et L' la limite de la suite $g(x)$ lorsque x tend vers α.
α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un réel a.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$L' \in \mathbb{R}$	$L' = +\infty$	$L' = -\infty$
$L \in \mathbb{R}$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$
$L = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**FI**
$L = -\infty$	$-\infty$	**FI**	$-\infty$

Produit de limites : $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) \times g(x)$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$L' \in \mathbb{R}^*$	$L' = 0$	$L' = \pm\infty$
$L \in \mathbb{R}^*$	$L \times L'$	0	$\pm\infty$
$L = 0$	0	0	**FI**
$L = \pm\infty$	$\pm\infty$	**FI**	$\pm\infty$

Quotient de limites : $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{g(x)}{f(x)}$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$L' \in \mathbb{R}^*$	$L' = 0$	$L' = \pm\infty$
$L \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{L'}{L}$	0	$\pm\infty$
$L = \pm\infty$	0	0	**FI**

FI est une forme indéterminée.
$\pm\infty$ se détermine à l'aide de la règle des signes.

Définition

Soit $u : I \longmapsto J$ une fonction définie dans un intervalle I et à valeurs dans J et $f : J \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction définie dans un intervalle J. Pour tout réel $x \in I$, $u(x)$ appartient à J de sorte que l'on peut calculer son image par f, le réel $f(u(x))$.
La fonction $x \longmapsto f(u(x))$ est appelée la composée de u par f, on la note $f \circ u$.

Théorème

Soit α un élément ou une extrémité de I et β un élément ou une extrémité de J et ℓ un nombre réel ou $\pm\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = \beta$ et $\lim\limits_{y\to\beta} f(y) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} (f \circ u)(x) = \ell$.

Théorème

Soit f, g, h trois fonctions définies sur un même ensemble D, α un élément ou une extrémité éventuellement infinie de D.

Théorème d'encadrement :

Si pour tout $x \in D$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} h(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ell$.

Théorème de comparaison :

- Si pour tout $x \in D$, $g(x) \leq f(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$.
- Si pour tout $x \in D$, $f(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} h(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$.

Théorème de prolongement des inégalités :

Si pour tout $x \in D$, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ell'$ alors $\ell \leq \ell'$.

Théorème

Théorème des croissances comparées : pour $n \in \mathbb{N}^*$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

❤ Démonstration ❤

- Pour démontrer ce théorème, nous allons utiliser l'inégalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$. Pour cela, considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 1 - x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = e^x - 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f admet un minimum en $(0;0)$. On en déduit donc $e^x - 1 - x \geq 0 \iff e^x \geq 1 + x$

- Soit $x \neq 0$, $e^x \geq 1 + x \iff e^x \geq x$ donc plus particulièrement :
$e^{\frac{x}{n+1}} \geq \dfrac{x}{n+1} \iff e^x \geq \left(\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1} \iff \dfrac{e^x}{x^n} \geq \dfrac{x}{(n+1)^{n+1}}$
Lorsque x tend vers $+\infty$, $\dfrac{x}{(n+1)^{n+1}}$ diverge également vers $+\infty$. Par comparaison, $\dfrac{e^x}{x^n}$ diverge vers $+\infty$.
Par inverse, on déduit la convergence de $\dfrac{x^n}{e^x}$ vers 0.
Pour le dernier résultat, il suffit d'écrire $x^n e^x = \dfrac{x^n}{e^{-x}} = (-1)^n \dfrac{(-x)^n}{e^{-x}}$
En posant $u(x) = -x$ et $f(y) = \dfrac{y^n}{e^y}$, on obtient $g(x) = \dfrac{(-x)^n}{e^{-x}} = f(u(x))$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} f(y) = 0$
Il vient donc par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} f(u(x)) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Exemple

Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2)$

b. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-2x}{x-1}$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}-3x^3+2x^2-6x+1$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$

e. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

f. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

g. $\lim\limits_{x\to+\infty}x+\sin(x)$

h. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cos(x)}{x^2+1}$

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+x}{e^x-x^2}$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{-2}{1-x}$

Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet des asymptotes dont on précisera les équations.

Exemple

Méthode de composition : Soit f la fonction définie sur $]\frac{1}{2};+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{2-\dfrac{1}{x}}$

Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Exemple

Méthode de comparaison : Calculer la limite de $f(x)=\sin(x)+x$ lorsque x tend vers $+\infty$.