Version 221027

2022/2023

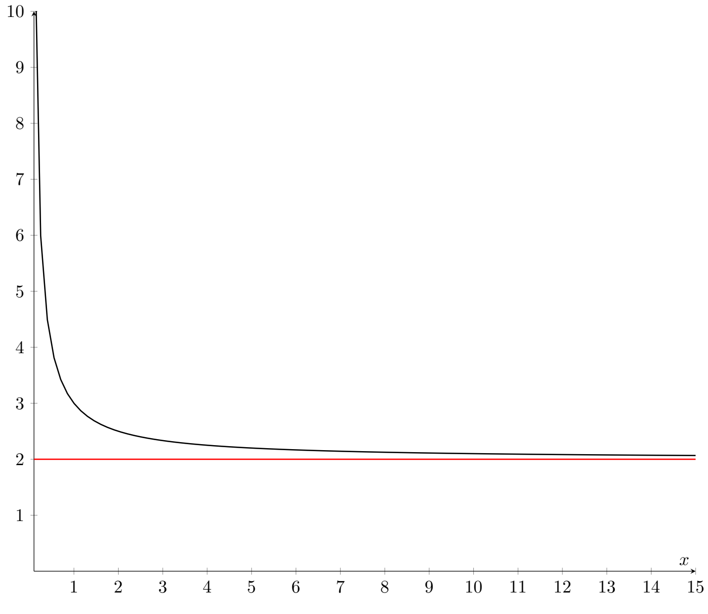
Limites des fonctions

I Limite à l'infini

I.1 Limite finie

Exemple

On a représenté en noir ci-dessous la fonction f définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;15]$.
En rouge, on a représenté la fonction constante $y = 2$.
On constate que la fonction f se rapproche rapidement de la droite. Autrement dit, la distance entre la droite et la courbe représentative de f tend vers 0 lorsque x grandit.
On dit alors que la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$ est 2.



Définition

- La droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.
- La droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

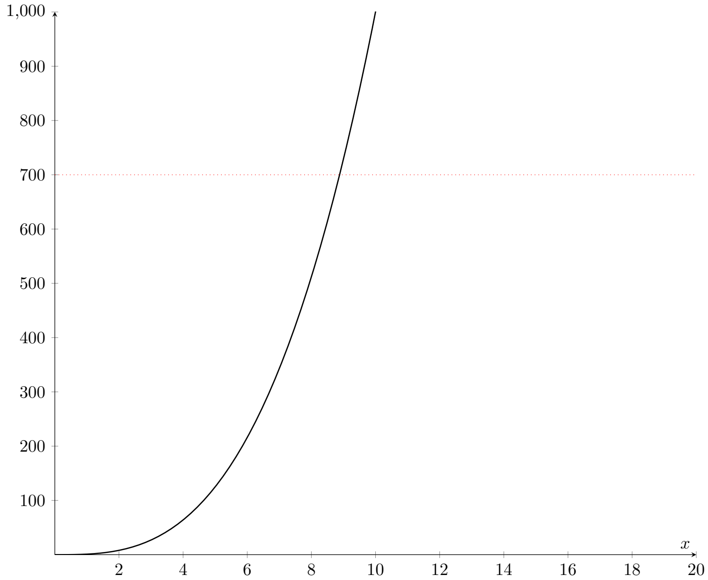
Remarque

Dans l'exemple ci-dessus, l'asymptote horizontale de f en $+\infty$ est $y = 2$.
On constate que la courbe se rapproche donc de son asymptote horizontale en $+\infty$.

I.2 Limite infinie

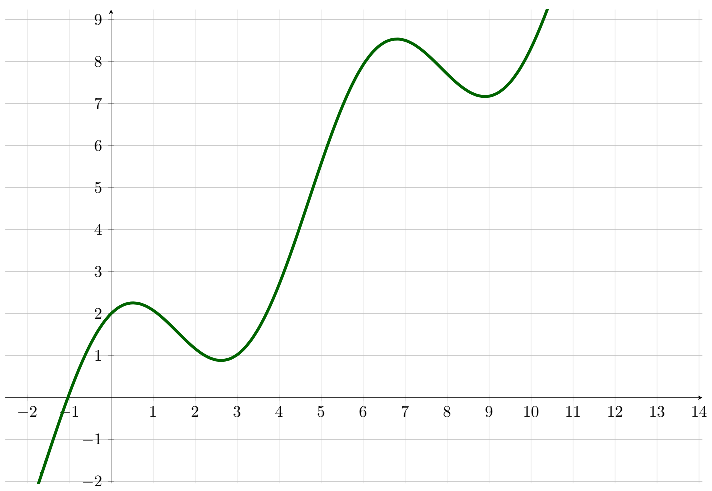
Exemple

On a représenté en noir ci-dessous la fonction f définie par $f(x) = x^3$ sur l'intervalle $[0; 20]$.
On constate que quelque soit le réel A choisit, il est possible de trouver un x tel que $f(x)$ soit plus grand que A.



Remarque

- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas obligatoirement croissante !
  Voici un exemple ci-dessous avec $f(x) = 2\cos(x) + x$:



- Certaine fonction n'ont pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$, c'est le cas par exemple pour les fonction $y = \cos(x)$ et $y = \sin(x)$.

I.3 Limites à connaître

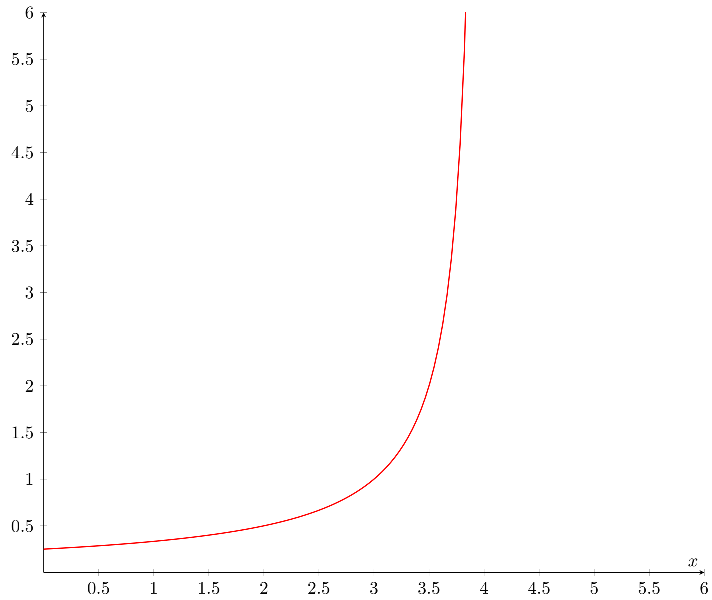
Propriété

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

II Limite en un réel

Exemple

On a représenté en rouge ci-dessous la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{4\}$ par $f(x) = -\frac{1}{x-4}$.
On constate que la fonction f tend vers $+\infty$ lorsque x se rapproche de 4.

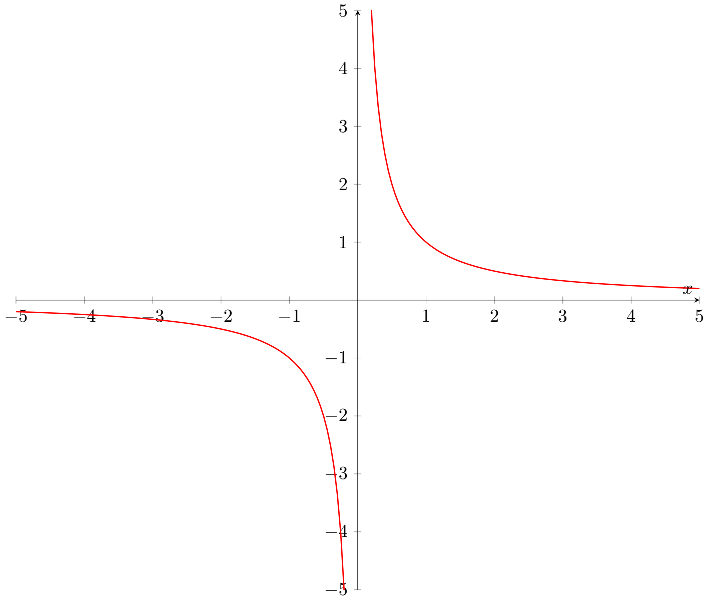


Définition

- La droite d'équation $x = A$ avec $A \in \mathbb{R}$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f en A si $\lim\limits_{x \to A} f(x) = +\infty$.
- La droite d'équation $x = A$ avec $A \in \mathbb{R}$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f en A si $\lim\limits_{x \to A} f(x) = -\infty$.

Remarque

Certaines fonctions n'ont pas la même limite à " droite " ou à " gauche " de A.
Par exemple, la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ a une limite à gauche de 0, et une limite à droite de 0 :



$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

III Opérations sur les limites

Somme de limites : $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) + g(x)$

Soit L, la limite de la suite $f(x)$, et L' la limite de la suite $g(x)$ lorsque x tend vers α.
α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un réel a.

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$	$L' \in \mathbb{R}$	$L' = +\infty$	$L' = -\infty$
$L \in \mathbb{R}$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$
$L = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**FI**
$L = -\infty$	$-\infty$	**FI**	$-\infty$

Produit de limites : $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) \times g(x)$

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$	$L' \in \mathbb{R}^*$	$L' = 0$	$L' = \pm\infty$
$L \in \mathbb{R}^*$	$L \times L'$	0	$\pm\infty$
$L = 0$	0	0	**FI**
$L = \pm\infty$	$\pm\infty$	**FI**	$\pm\infty$

Quotient de limites : $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{g(x)}{f(x)}$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$L' \in \mathbb{R}^*$	$L' = 0$	$L' = \pm\infty$
$L \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{L'}{L}$	0	$\pm\infty$
$L = \pm\infty$	0	0	**FI**

FI est une forme indéterminée.
$\pm\infty$ se détermine à l'aide de la règle des signes.

Exemple

Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-5)(3+x^2)$

b. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1-2x}{x-1}$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$

d. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5}$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-2}{1-x}$
Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet des asymptotes dont on précisera les équations.

Exemple

Méthode de composition : Soit f la fonction définie sur $]\dfrac{1}{2};+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{2 - \dfrac{1}{x}}$
Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Exemple

Méthode de comparaison : Calculer la limite de $f(x) = \sin(x) + x$ lorsque x tend vers $+\infty$.