Version 250411

2024/2025

Calcul intégral

Leibniz étudie la philosophie, le droit et la théologie et ne se tourne que tardivement vers les mathématiques. Dans les années 1670, il publie plusieurs articles dans lesquels on trouve toutes les bases du calcul différentiel et du calcul intégral. Il propose des pistes innovantes dans différents domaines des mathématiques qui seront reprises deux siècles plus tard dans la genèse de la théorie des ensembles et de la logique mathématique.

I Rappels

Définition

Une fonction f est continue en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
Une fonction est continue sur un intervalle si elle est continue en tout point de cet intervalle.

Une fonction est continue en un point lorsque $f(x)$ prend des valeurs aussi proches que l'on veut de $f(a)$ dès que x est suffisamment proche de a.
Elle est continue sur un intervalle entier si elle l'est en tous les points de celui-ci : graphiquement, la courbe représentative d'une fonction continue est un trait "continu" obtenu "d'un seul trait", sans lever le crayon.

Propriété

Les fonctions polynômes, rationnelles, racines carrées, logarithme et exponentielle, et trigonométriques, sinus et cosinus, sont continues sur leur ensemble de définition.

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I, admet des primitives sur cet intervalle.

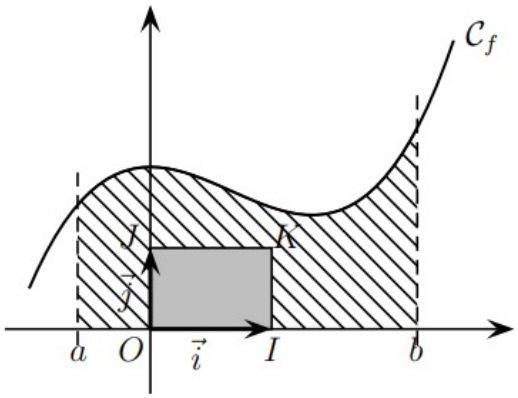
II Intégrale d'une fonction continue et positive

Soit f une fonction "continue" et positive sur un intervalle $[a;b]$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On cherche à déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

L'unité d'aire est donnée par le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$: l'unité d'aire est l'aire du rectangle $OIKJ$.



Définition

Cette aire s'appelle **l'intégrale de la fonction f de a à b**; on la note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Remarque

Le "x" dans "dx" indique la variable par rapport à laquelle on effectue les calculs : c'est la variable d'intégration.
C'est une variable dite muette : la lettre qui la désigne n'a pas d'importance :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(\alpha)\,d\alpha = \ \ldots$$

Cette notation est celle aussi rencontrée pour la dérivée (plus souvent en physique) : $f' = \dfrac{df}{dx}$, en électricité : $i = \dfrac{dq}{dt}$ ou encore en mécanique : $v = \dfrac{dx}{dt}$ ...

II.1 Exercices

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x$. Représenter $\mathcal{C}_f$ et calculer $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = 2x + 2$. Représenter $\mathcal{C}_f$ et calculer $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

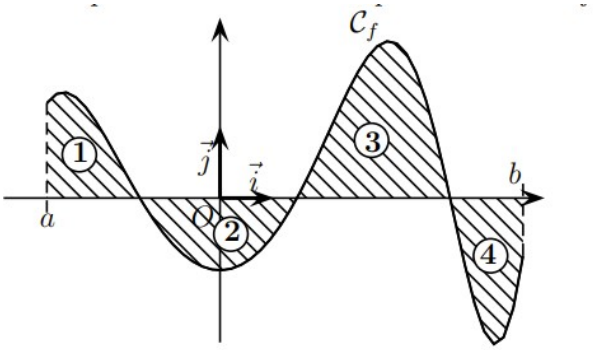
Déterminer de façon explicite, pour tout réel $t \geq 0$, la fonction $F(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

III Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Remarque

D'une manière plus générale, pour une fonction f quelconque (continue mais pas forcément positive), l'intégrale de f sur $[a;b]$ est l'aire **algébrique** du domaine compris entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.
L'intégrale de f est la somme des aires algébriques des domaines sur lesquels f garde un signe constant.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{aire}(\mathcal{D}_1) - \text{aire}(\mathcal{D}_2) + \text{aire}(\mathcal{D}_3) - \text{aire}(\mathcal{D}_4)$$



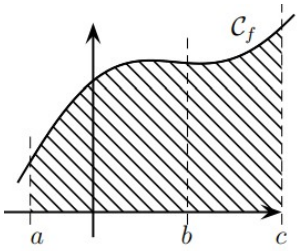
On convient de plus que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ En résumé, l'intégrale d'une fonction est l'aire algébrique, comptée positivement de gauche à droite (dans le sens croissant sur l'axe des abscisses) et au-dessus de l'axe des abscisses.
Si on souhaite calculer une aire géométrique, on calcule l'intégrale de f sur chacun des sous domaines où f est de signe constant et on ajoute les valeurs absolues de ces aires.

Propriété

Relation de Chasles :

Soit f une fonction continue sur $[a;c]$, et soit b un réel de $[a;c]$, alors

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$



IV Intégrale et primitive

Théorème

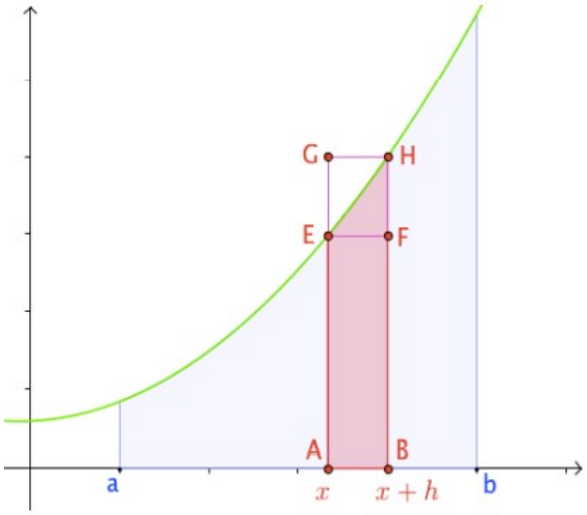
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $a \in I$.
Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est **l'unique primitive de f sur I s'annulant en a**

Démonstration

Cas où f est strictement croissante :
1^{er} cas $h > 0$:
On considère deux réels x et $x + h$ de l'intervalle $[a; b]$.
On veut démontrer que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

On a représenté ci-contre, la courbe représentative de la fonction f.
Cette différence est égale à l'aire de la surface colorée en rouge.
Elle est comprise entre les aires des rectangles ABFE ($h \times f(x)$) et ABHG ($h \times f(x+h)$).
Comme f est ici supposée croissante sur $[a; b]$, on a donc :
$h \times f(x) < F(x+h) - F(x) < h \times f(x+h)$
Donc $f(x) < \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} < f(x+h)$
f est continue sur $[a; b]$ donc
$\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$.
D'après le théorème d'encadrement, on a donc
$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$



F est donc une primitive de f. Par ailleur, F s'annule en a, donc F est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
2^{nd} cas $h < 0$:
La démonstration est analogue (les encadrements sont inversés)

Exemple

Soit F la fonction définie sur $[0; 10]$ par : $F(x) = \int_0^x \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$

a. Étudier les variations de F.
b. Tracer sa courbe représentative.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$ et F une primitive de f sur I, alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Démonstration

La fonction G définie sur $[a;b]$ par $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $[a;b]$.
Si F est une primitive de f alors pour tout x de $[a;b]$ on a $G(x) = F(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
En effet, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.
De plus $G(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $G(a) = F(a) + k$ donc $F(a) = -k$ et donc $k = -F(a)$.
Or $G(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) + k = F(b) - F(a)$.

Remarque

Notation :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \big[F(t)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple

Calculer les intégrales suivantes :

a. $A = \displaystyle\int_1^4 \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x$ b. $B = \displaystyle\int_2^5 3x^2 + 4x - 5\,\mathrm{d}x$ c. $C = \displaystyle\int_{-1}^1 e^{-2x}\,\mathrm{d}x$

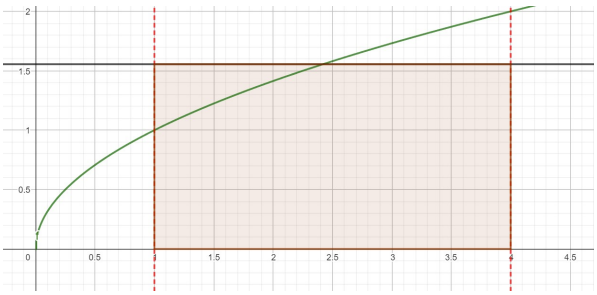
Définition

Valeur moyenne d'une fonction :
Soit f continue sur $[a;b]$, avec $a < b$, alors la valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le nombre

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque

La valeur moyenne μ est la hauteur du rectangle de base le segment $[a;b]$ qui a la même aire que la surface du plan délimitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Exemple

On modélise, à l'aide d'une fonction, le nombre de malades lors d'une épidémie. Au n-ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$.
Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

Théorème

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a;b]$ dont les dérivées sont des fonctions continues sur $[a;b]$. Alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

Démonstration

uv est dérivable sur $[a;b]$ et on a $(uv)' = u'v + uv'$.
Les fonctions uv', $u'v$ et $(uv)'$ sont continues sur $[a;b]$, donc :
$\big[u(x)v(x)\big]_a^b = \displaystyle\int_a^b (uv)'(x)\,dx = \int_a^b (u'v + uv')(x)\,dx = \int_a^b (u'v)(x)\,dx + \int_a^b (uv')(x)\,dx$...
D'où le résultat.

Exemple

Calculer les intégrales suivantes :

a. $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,dx$ b. $B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x)\,dx$ c. $C = \displaystyle\int_1^{e^2} \ln(x)\,dx$

V Propriétés de l'intégrale

Propriété

Linéarité de l'intégrale :
Pour toutes fonctions f et g continues sur $[a;b]$ et tout réel λ,

- $\displaystyle\int_a^b \Big(f(x)+g(x)\Big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx$

Exemple

On pose $A = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$ et $B = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$

a. Calculer $A+B$ et $A-B$.

b. En déduire A et B

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$, alors l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de f et g et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ vaut
$\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$
ou encore, en utilisant la linéarité de l'intégrale :
$\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

Exemple

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2+1$ et $g(x) = -x^2+2x+5$.
On admet que pour tout x de $[-1;2]$, on a $f(x) \leq g(x)$.
Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle $[-1;2]$.

Propriété

Positivité :

- Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- Si $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

Propriété

Ordre et inégalité :
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ telles que, pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Démonstration

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ telles que, pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \leq g(x)$.
On a donc $g(x) - f(x) \geq 0$ sur $[a;b]$.

D'où $\displaystyle\int_a^b g(x) - f(x)\,dx \geq 0$

Donc $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \; - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

Et finalement, $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \; \geq \int_a^b f(x)\,dx$

Exemple

a. Démontrer que pour tout x de $[0;1]$, on a $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b. En déduire que : $0 \leq \displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx \; \leq e - 1$.

Propriété

Parité et périodicité :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[-a;a]$.

- Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$
- Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$
- Si f est pérodique de période T, alors $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$