LABOR ET DILECTIO — PAU 1884

2025/2026

Géométrie vectorielle dans l'espace

Le mathématicien français **Etienne Bézout** (1730-1783) eut une grande influence sur l'enseignement des mathématiques à son époque grâce à son livre *Cours de mathématiques* publié mainte fois et diffusé dans toute l'Europe. Il était par ailleurs un expert en géométrie analytique. Il étudiait les surfaces données par une équation polynomiale et pour des recherches d'intersections, il élabora des méthodes de résolution de système d'équations ce qui explique qu'on retrouve son nom attaché à des résultats d'algèbre linéaire. Il fut un précurseur de ce que l'on nomme aujourd'hui la géométrie algébrique.

I Vecteurs de l'espace

Définition

La notion de vecteur du plan se généralise à l'espace.
Comme dans le plan, un vecteur non nul de l'espace $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ est donc déterminée par la donnée

- d'une **direction** : celle de la droite (AB) ;
- d'un **sens** : celui de A vers B ;
- d'une **norme** : c'est la distance AB. On la note $\|\overrightarrow{AB}\|$

Remarque

Lorsque les points A et B sont confondus, on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur nul et on note $\overrightarrow{0}$ ce vecteur. Le vecteur nul à une norme égale à 0, mais n'a ni direction, ni sens.

Définition

Égalité de deux vecteurs - Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et tout point $A \in \varepsilon$, il existe un point B unique, tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. On dit que $\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Théorème

Translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ - Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. Le procédé qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que $MM' = \overrightarrow{u}$ est une translation de l'espace, appelé, **translation de vecteur $\overrightarrow{u}$**.

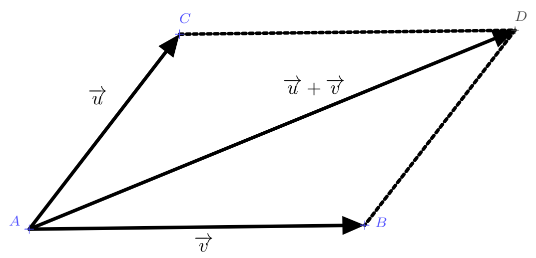
II Opérations sur les vecteurs

Propriété

Somme de deux vecteurs - Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Comme les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires (peuvent être “ mis ” sur le même plan), on obtient leur somme en utilisant les deux méthodes utilisées dans le plan :

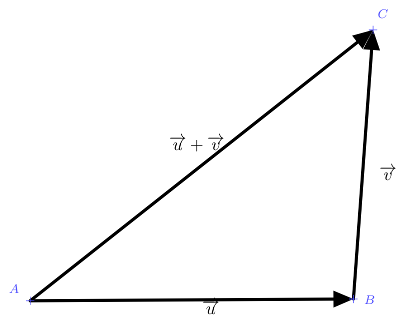
- la règle du parallélogramme ;
- la relation de Chasles.

Règle du parallélogramme



$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$, alors $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AD}$ où D est le point tel que $ABCD$ est un parallélogramme.

Relation de Chasles

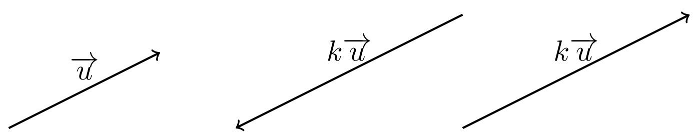


$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

Définition

$\overrightarrow{u}$ est un vecteur quelconque différent de $\overrightarrow{0}$ et k un nombre réel non nul.
On appelle produit du vecteur $\overrightarrow{u}$ par le réel k, le vecteur noté $k\overrightarrow{u}$:

- de même direction que $\overrightarrow{u}$,
- de même sens que $\overrightarrow{u}$ si $k>0$ et de sens contraire si $k<0$,
- de norme égale à $|k|$ fois la norme de $\overrightarrow{u}$



L'addition des vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un scalaire dans l'espace ont les mêmes propriétés que dans le plan.

Règles de calcul dans l'espace vectoriel - Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace et k et k' deux nombres réels. Alors

- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
- $(k+k') \cdot \overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$
- $k \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{v}$
- $k(k' \cdot \overrightarrow{u}) = (kk') \cdot \overrightarrow{u}$

Propriété

Combinaison linéaire de vecteurs

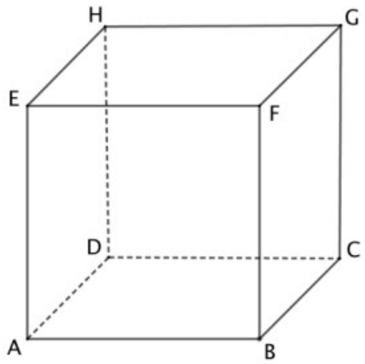
Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle **combinaison linéaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tout vecteur de la forme : $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$, où α et β sont des réels.

Définition

Exemple

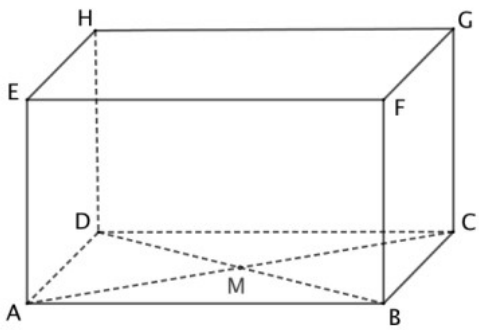
A l'aide du cube ci-contre, représenter les vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ donnés par :

- $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}$
- $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$
- $\overrightarrow{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}$



Exemple

Dans le parallélépipède ci-dessous, M est le centre du rectangle $ABCD$.
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MF}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.



III Droites de l'espace

III.1 Colinéarité de deux vecteurs

Définition

Vecteurs colinéaires

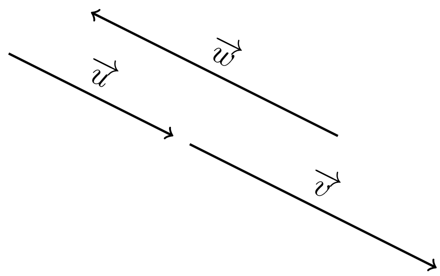
Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires signifie qu'ils ont même direction c'est à dire qu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.

Remarque

- Pour montrer que deux vecteurs sont colinéaires, il suffit de trouver la valeur de k.
- Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tout vecteur du plan, en effet :
  $\forall \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si $k = 0$. En revanche, aucun vecteur n'est colinéaire au vecteur nul (si $\overrightarrow{u}$ non nul alors $\nexists k \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{u} = k \times \overrightarrow{0}$).

Exemple

Ci-contre, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires :



III.2 Définition et caractéristique des droites

Théorème

Caractérisation vectorielle d'une droite :

- **Droite donnée par un couple de points distincts :** Soit A, B deux points distincts de l'espace. La droite (AB) est l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.
- **Droite donnée par un point et un vecteur directeur :** Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.
  L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ est la droite (AB) ou B est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Définition

La **direction d'une droite** est l'ensemble des vecteurs ayant un représentant dans D. Tout vecteur non nul, dans la direction de D est appelé un **vecteur directeur de D**.

Remarque

Deux droites de l'espace sont parallèles si et seulement si, leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
Si elles ont de plus, un point en commun alors elles sont confondues.

IV Plan de l'espace

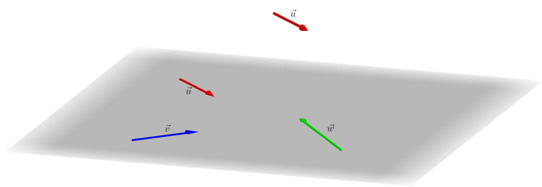
IV.1 Coplanéarité de trois vecteurs (2 définitions)

Définition

On dit que trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont **coplanaires** si l'un (au moins) des trois s'écrit comme combinaison linéaire des deux autres.

Définition

Trois vecteurs sont coplanaires s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.

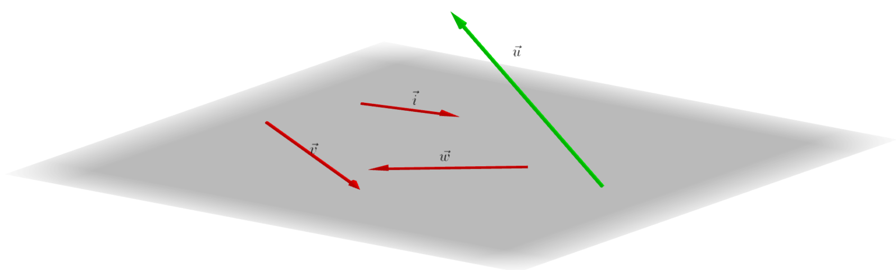


Remarque

Si parmi les trois vecteurs deux d'entre eux sont colinéaires, alors les trois vecteurs sont coplanaires. En particulier, s'il y a le vecteur nul, les trois vecteurs sont coplanaires.

Exemple

Ci-dessous, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{i}$ sont coplanaires.



IV.2 Définition et caractérisations des plans

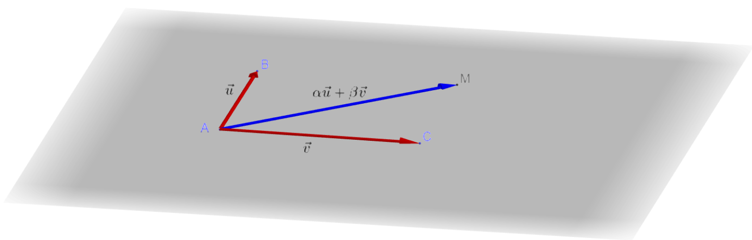
Remarque

Un plan est donné par trois points A, B et C non alignés. Un plan peut donc également être défini par la donnée d'une droite et d'un point extérieur à cette droite, ou encore à deux droites sécantes.

Théorème

Caractérisations vectorielle d'un plan

- **Plan donné par trois points :** Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.
  Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.
- **Plan donné par un point et un couple de vecteurs directeurs :** Soit A un point de l'espace, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.
  L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ est le plan (ABC) où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$.



Plan donné par trois points

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace. Soit M un point de l'espace et montrons que

$$M \in (ABC) \iff \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont coplanaires}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Si M appartient au plan (ABC), alors les points M, A, B et C étant coplanaires, il en va de même des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Inversement, si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires. En ce cas, comme A, B et C ne sont pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par conséquent, $\overrightarrow{AM}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Il existe donc des réels α et β tels que

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

Considérons alors le point N de la droite (AB) vérifiant $\overrightarrow{AN} = \alpha\overrightarrow{AB}$. La relation ci-dessus entraîne que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \beta\overrightarrow{AC}$, soit encore

$$\overrightarrow{NM} = \beta\overrightarrow{AC}$$

Il s'ensuit que le point M appartient à la droite parallèle à (AC) passant par N. Comme les points A, C et N appartiennent au plan (ABC), il en va de même pour M.
Finalement, nous avons bien établi l'équivalence annoncée.

Plan donné par un point et un couple de vecteurs directeurs

Soit A un point de l'espace, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. D'après le théorème *d'égalité de deux vecteurs*, il existe des points B et C uniques tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$. D'après le point précédent, on a pour tout point M de l'espace :

$$M \in (ABC) \iff \overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont coplanaires}$$

Or $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires $\iff$ $\overrightarrow{AM}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AM}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ $\iff$ il existe des réels α et β tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$

Démonstration

La **direction d'un plan** est l'ensemble des vecteurs ayant un représentant dans $\mathcal{P}$. Tout couple de vecteurs non colinéaires, dans la direction de $\mathcal{P}$ est appelé un **couple de vecteurs directeurs** de $\mathcal{P}$.

Définition

Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.
Pour démontrer que deux plans sont parallèles, il suffit donc de montrer que deux vecteurs non colinéaires de lun des plans sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de lautre.

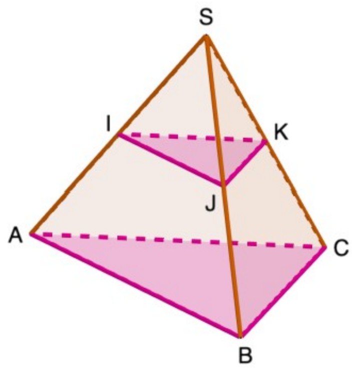
Propriété

Démonstration

Soit deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de repères respectifs $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $(B, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus, la démonstration est triviale.
Supposons alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ non confondus.
Supposons alors qu'il existe un point M appartenant à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
Alors dans $\mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$, où (x, y) sont les coordonnées de M dans $\mathcal{P}$.
Alors dans $\mathcal{P}'$, on a $\overrightarrow{BM} = x'\overrightarrow{u} + y'\overrightarrow{v}$, où (x', y') sont les coordonnées de M dans $\mathcal{P}'$.
Donc $\overrightarrow{AB} = (x - x')\overrightarrow{u} + (y - y')\overrightarrow{v}$ donc $B \in \mathcal{P}$
Donc le repère $(B, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère de $\mathcal{P}$ et donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus ce qui est contraire à l'hypothèse de départ. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ n'ont aucun point en commun et sont donc parallèles.

Exemple

$SABC$ est une pyramide.
I, J et K sont les milieux respectifs de $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$. Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles

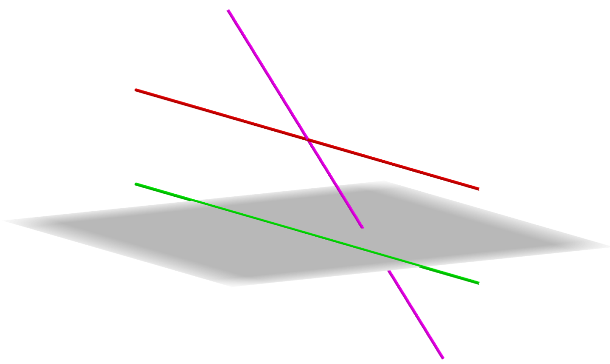


V Positions relatives de droites et de plans de lespace

V.1 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Soit (d) et $\mathcal{P}$ respectivement une droite et un plan de l'espace :

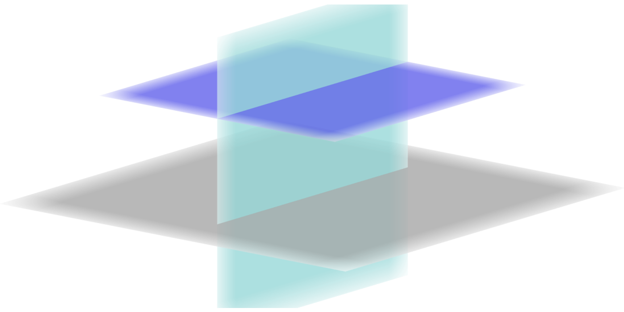
- (d) est $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles (droite rouge)
- (d) est $\mathcal{P}$ sont parallèles et confondus (droite verte)
- (d) est $\mathcal{P}$ sont sécants (droite violette). L'intersection est un point.



V.2 Positions relatives de deux plans

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de l'espace :

- $\mathcal{P}$ est $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles (plans gris et violet)
- $\mathcal{P}$ est $\mathcal{P}'$ sécants (plans gris et bleu). L'intersection est une droite.
- $\mathcal{P}$ est $\mathcal{P}'$ sont confondus (plans gris)



VI Base et repères de l'espace

VI.1 Coordonnées cartésiennes

Définition

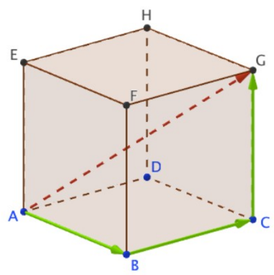
On appelle **base de l'espace** tout triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de vecteurs non coplanaires. L'intérêt des bases est d'engendrer tous les vecteurs de l'espace par combinaison linéaire

Exemple

ABCDEFGH est un cube.

a. Reconnaître une base de lespace.

b. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ dans cette base.



Exemple

ABCDEFGH est un cube.
Soit I le milieu de $[AH]$ et j le point de $[FI]$ tel que :
$\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FI}$
Démontrer que les points E, J et C sont alignés.

Théorème

Coordonnées d'un vecteur dans une base
Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ une base de l'espace. Tout vecteur de l'espace s'écrit, de manière unique, comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$.
Autrement dit, pour tout vecteur $\overrightarrow{t}$, il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel que :

$$\overrightarrow{t} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w}$$

Ce triplet (x, y, z) s'appelle les **coordonnées du vecteur $\overrightarrow{t}$ dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$**.

Définition

Un **repère de l'espace** est un quadruplet $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ dans lequel

- O est un point de l'espace appelé **origine du repère**
- le triplet de vecteurs $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ est une **base de l'espace**.

Théorème

Coordonnées d'un point de l'espace

Soit $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de nombres réels $(x; y; z)$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

$(x; y; z)$ sont les coordonnées de M dans le repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$: x est l'abscisse, y est l'ordonnée et z est la cote de M dans ce repère.

Exemple

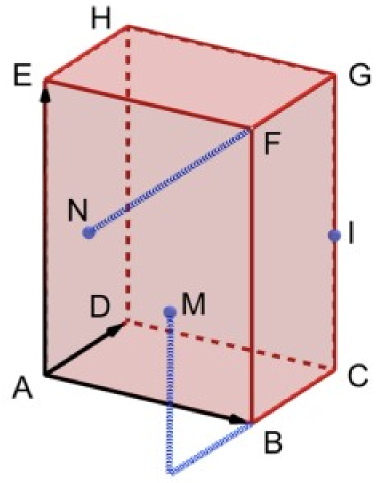
Soit un parallélépipède ABCDEFGH.
I est le milieu de $[CG]$.
Les points M et N sont définis par :
$\overrightarrow{NF} = 2\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CI}$

a. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, donner les coordonnées de tous les points de la figure.

b. Placer le point $k(1; 3; -1)$.

c. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont égaux.

d. Démontrer que M est le milieu du segment $[BN]$.



Soit M un point de l'espace. Montrons l'existence et l'unicité d'un triplet de réels $(x;y;z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$.

Existence

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par O et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ (qui ne sont pas colinéaires car $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ ne sont pas coplanaires).

Soit M' le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de la droite passant par M et dirigé par $\overrightarrow{k}$. Ainsi comme $M' \in \mathcal{P}$, les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont coplanaires d'après le théorème de caractérisation vectorielle d'un plan. Plus précisément, comme $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ non colinéaires, il existe deux réels x et y tels que $OM' = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$. D'autre part, comme M' appartient à la droite passant par M et dirigée par $\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{M'M}$ et $\overrightarrow{k}$ sont colinéaires (et que $\overrightarrow{k}$ est non nul), il existe un réel z tel que $\overrightarrow{M'M} = z\,\overrightarrow{k}$. Finalement,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

Unicité

Soit $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$ des triplets de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k} = x'\,\overrightarrow{i} + y'\,\overrightarrow{j} + z'\,\overrightarrow{k}$. En ce cas,

$$(z' - z)\,\overrightarrow{k} = (x - x')\,\overrightarrow{i} + (y - y')\,\overrightarrow{j}$$

Montrons par l'absurde que $z - z' = 0$. Supposons au contraire que $z - z' \neq 0$, en ce cas, nous pouvons écrire

$$\overrightarrow{k} = \frac{x - x'}{z' - z}\,\overrightarrow{i} + \frac{y - y'}{z' - z}\,\overrightarrow{j}$$

On aurait alors $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ coplanaires, ce qui est absurde vu que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base. Par l'absurde, on a bien établi que $z - z' = 0$ et par suite

$$(x - x')\,\overrightarrow{i} + (y - y')\,\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$$

Comme $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ ne sont pas colinéaires, il en résulte comme précédemment que $x - x' = y - y' = 0$. Finalement on a bien démontré que $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$, ce qui prouve l'unicité du triplet de coordonnées.

Démonstration

VI.2 Calculs en coordonnées

Propriété

Tous les résultats de la géométrie plane s'étendent à l'espace par adjonction d'une troisième coordonnée.
Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère de l'espace.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées respectives $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ dans la base $\mathcal{B}$ alors
  - Pour tout réel k, $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx; ky; kz)$.
  - Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y'; z + z')$.
- Si A et B ont pour coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et $(x_B; y_B; z_B)$, alors :
  - Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
  - Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2})$.

Exemple

Dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points : $A(2; -1; 4)$, $B(6; -7; 0)$ $C(1; 0; 1)$ et $D(13; -16; 5)$
Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.