



NOTION DE FONCTION

I Définition et notation

Soit D une partie de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Fonction

Une fonction f définie sur D associe à tout nombre réel x de D un unique nombre réel, noté $f(x)$.

Ensemble de définition

D est appelé l'ensemble de définition de la fonction f : c'est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est définie (ou existe)..

Définitions

On note :

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Et on lit "La fonction f , définie pour x appartenant à D ($x \in D$), qui à un nombre x associe le nombre $f(x)$ ".

I.1 Image, antécédent

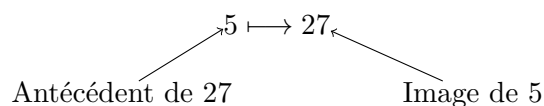
Exemple

Pour la fonction $f(x) = x^2 + 2$:

$$f(5) = 27 \text{ et } f(-1) = 3$$

On dit que :

- l'image de 5 par la fonction f est 27.
- Un antécédent de 27 par la fonction f est 5.



- Un nombre possède une unique image.
- Cependant, un nombre peut posséder plusieurs antécédents.

Remarque

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x} + 1$

a. **Compléter** le tableau de valeurs :

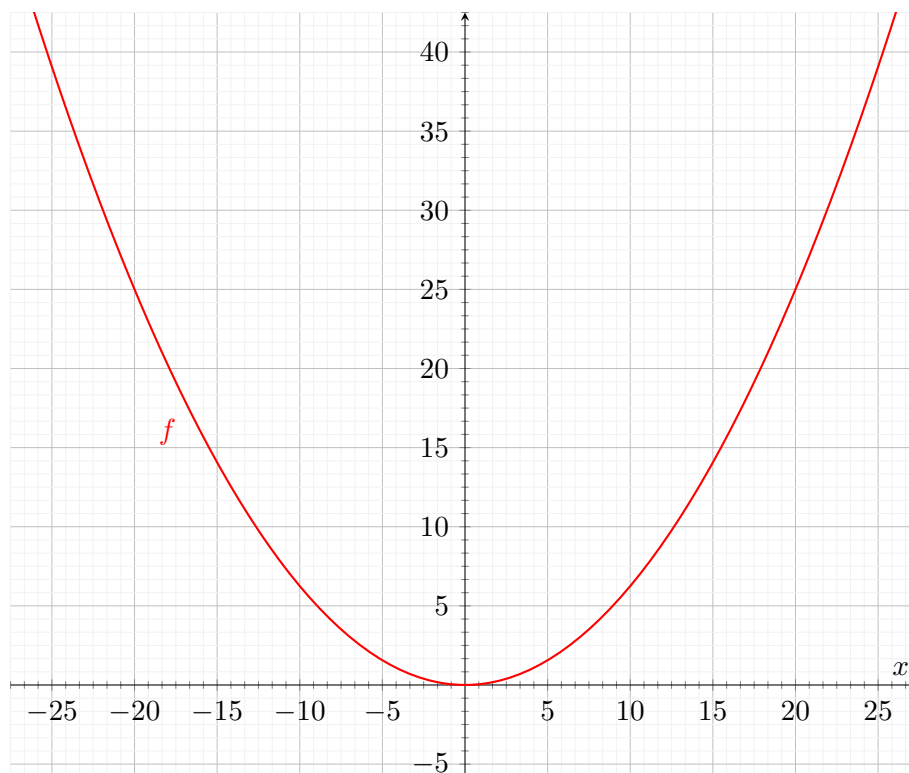
x	4	9	16	25
$\sqrt{x} + 1$				

b. Compléter :

- (a) L'image de 4 par f est
- (b) Un antécédent de 4 par f est
- (c) $f : \dots \mapsto 4$
- (d) $f(25) = \dots$

II Représentation graphique d'une fonction

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur D :



On peut dire que l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ avec $y = f(x)$ et $x \in D$ définissent la courbe représentative de la fonction f .

On dira que $y = f(x)$ est l'équation de la courbe.

Définition

La courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient $y = f(x)$ avec $x \in D$.

Exemple

Exercices : 1 à 8

III Variation d'une fonction

Un des objectifs principaux de l'étude d'une fonction est de déterminer son **sens de variation** et ses extremums.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . a et b deux nombres réels de I .

Dire que f admet **un maximum** M en a , tel que $f(a) = M$, sur I signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle I , $f(x) \leq M$

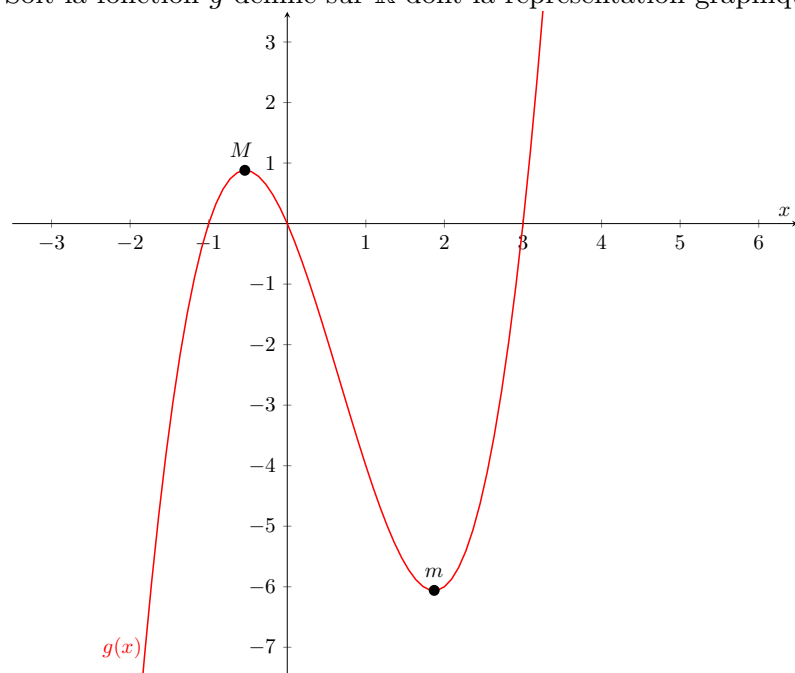
Dire que f admet **un minimum** m en b , tel que $f(b) = m$, sur I signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle I , $f(x) \geq m$

Un **extremum** est soit un minimum, soit un maximum.

Définition

Exemple

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



g admet un maximum M sur l'intervalle $[-1, 0]$ atteint en $(-0,5; 1)$.

g admet un minimum m sur l'intervalle $[0, 3]$ atteint en $(2; -6)$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- Dire que f est **croissante** sur I signifie que pour tous réels a et b de I : si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$.
- Dire que f est **décroissante** sur I signifie que pour tous réels a et b de I : si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$.
- Dire que f est **constante** sur I signifie que pour tous réels a et b de I : $f(a) = f(b)$.
- Dire que f est **monotone** sur I signifie que f est soit croissante sur I , soit décroissante sur I .

la fonction g définie précédemment. g est croissante sur $] -\infty; -0,5]$, décroissante sur $[-0,5; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$.

Un tableau de variations résume les variations d'une fonction en faisant apparaître les intervalles où elle est monotone et les éventuels extremums

Pour la fonction g , on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-0,5$	2	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	1	-6	$+\infty$

III.1 Exercice

Soit g la fonction définie sur $[-10; 10]$ par l'expression $g(x) = 2x - 3$.

Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_g$ et donner le tableau de variation correspondant.

IV Taux de variation

Taux de variation (variation relative) :

Le taux de variation de la fonction f entre a et b est le nombre : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Variation absolue :

la variation absolue de f entre M_1 et M_2 est $y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$.

Le taux de variation est le coefficient directeur de la droite $(M_1 M_2)$

Exemple

On considère la fonction carré $f : x \mapsto x^2$ et la fonction cube, $g : x \mapsto x^3$, définies sur $\mathbb{R}$. Calculer les taux de variation de f et de g , puis les comparer entre :

- a. 0 et 1 b. 0 et 2 c. 0 et 4 d. -1 et 0 e. -2 et -1

Exemple

Exercices : 20 à 33

V Les fonctions affines

Une fonction affine f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ où m est le **coefficient directeur** et p est **l'ordonnée à l'origine** de la droite représentative.

Lorsque $p = 0$, la fonction f définie par $f(x) = mx$ est **une fonction linéaire**.

La représentation graphique d'une fonction affine est **une droite** (passant par l'origine si la fonction est linéaire).

Dans le cas d'une fonction constante, cette droite est parallèle à l'axe des abscisses.

Définition

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

Si $m > 0$, f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $m < 0$, f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

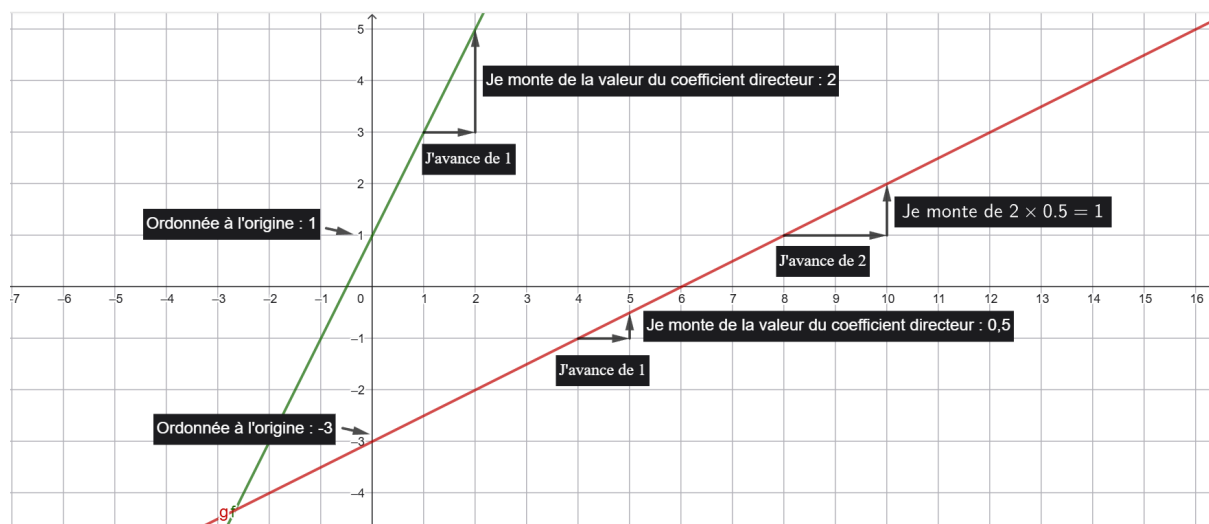
Si $m = 0$, f est constante sur $\mathbb{R}$.

Propriété

Pour tracer une fonction affine :

- On place le point de coordonnées $(0, p)$ avec p l'ordonnée à l'origine.
- On part alors de ce point, on se décale de une unité horizontalement, et on monte ensuite de m unités verticalement. Avec m le coefficient directeur. Si m est une fraction, par exemple $\frac{1}{3}$, on peut choisir de se décaler de 3 unités pour tomber sur des coordonnées de point entières. On place donc ce nouveau point.
- Finalement, on trace la droite passant par ces deux points en pensant à bien prolonger de part et d'autres.

Ci-dessous, on a tracé la fonction f d'équation $f(x) = 2x + 1$, et g d'équation $g(x) = \frac{1}{2}x - 3$.



Exemple

Construire le tableau de variations et le tableau de signe des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto 2x + 4$

b. $g : x \mapsto x - 4$

c. $h : x \mapsto -6x - 3$

Tracer les trois droites ci-dessus dans un repère adapté.

Déterminer l'expression de la fonction affine dont la courbe passe par les points $A(2; 2)$ et $B(1; 7)$.

Exemple

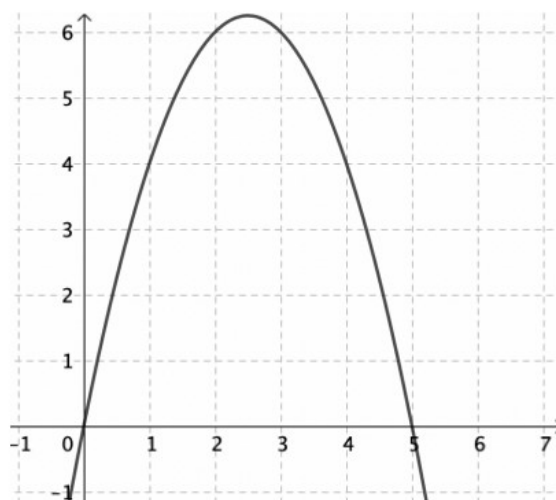
Exercice 9

VI Résolution graphique d'équations et d'inéquations

VI.1 Résolution graphique d'équations

Exemple

On a représenté la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.
Résoudre graphiquement l'équation $5x - x^2 = 4$.



- Par lecture graphique, les solutions obtenues sont approchées.
- L'équation $f(x) = 7$, par exemple, ne semble pas avoir de solution car la courbe représentée ne possède pas de point d'ordonnée 7.
- Graphiquement, on ne peut pas être certain que les solutions qui apparaissent sont les seules. Il pourrait y en avoir d'autres au-delà des limites de la représentation graphique tracée.

Remarque

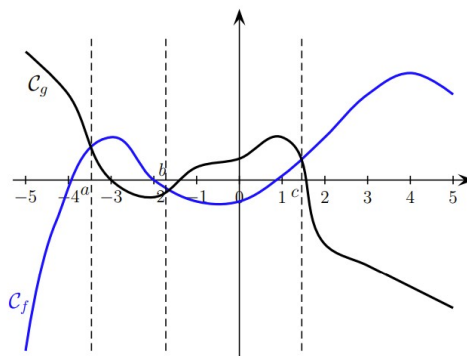
VI.2 Résolution graphique (et un peu algébrique) d'inéquations

Exemple

Dans la méthode précédente, on a représenté la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.
Résoudre graphiquement l'inéquation $5x - x^2 > 4$.

Étudier la position relative de deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, c'est déterminer quelle courbe est au-dessous ou au-dessus de l'autre.

Par exemple pour des fonctions f et g définies sur $[-5; 5]$, telles que :



On a,

- $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $[5; a]$ et sur $[b; c]$
- $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $[a; b]$ et sur $[c; 5]$.

- | | |
|---|--|
| • $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$ | • $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ |
| $\iff f(x) \leq g(x)$ | $\iff f(x) \geq g(x)$ |
| $\iff f(x) - g(x) \leq 0$ | $\iff f(x) - g(x) \geq 0$ |
| $\iff d(x) = f(x) - g(x)$ négatif | $\iff d(x) = f(x) - g(x)$ positif |

Ainsi, étudier la position relative des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est équivalent à étudier le signe de la différence $d(x) = f(x) - g(x)$.

VI.3 Exercices

Exercice

Soit $f(x) = -2x - 2$ et $g(x) = 6x - 2$

- Représenter graphiquement les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_g$ et étudier graphiquement leur position relative.
- Étudier précisément, algébriquement, leur position relative.

Exemple

Exercices : 34 à 43