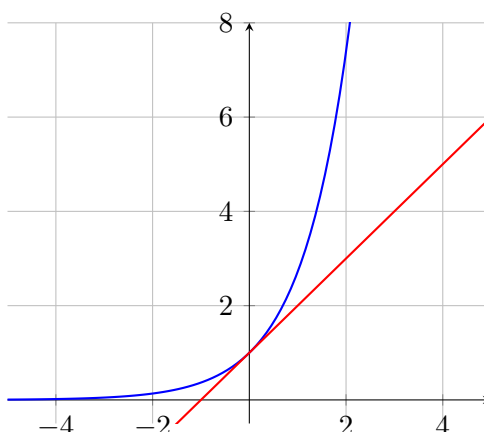




EXPONENTIELLE DE BASE E

I Définition de la fonction exponentielle de base e

Parmi toutes les fonctions $x \mapsto a^x$ il en existe une seule dont la tangente à la courbe représentative au point $(0; 1)$ a pour coefficient directeur 1.



Propriété

Cette fonction est la fonction exponentielle de base e, noté exp, telle que pour tout réel x , on a $\exp : x \mapsto e^x$

Le réel $e = e^1$ est environ égal à 2,718.

Définition

On verra que la fonction exponentielle est croissante. Mais sa croissance est très rapide, ainsi e^7 dépasse 1000, e^{14} dépasse le million et e^{21} dépasse le milliard.

Remarque



Valeurs particulières à connaître :

$e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

II Étude de la fonction exponentielle

Propriété

Dérivabilité :

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$

Limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Variations :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple

Dériver les fonctions suivantes :

a. $f(x) = 4x - 3e^x$

b. $g(x) = (x - 1)e^x$

c. $h(x) = \frac{e^x}{x}$

Propriété

Pour tous réels x et y on a :

• $e^{x+y} = e^x \times e^y$

• $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

• $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

• $(e^x)^n = e^{nx}$
avec $n \in \mathbb{N}$

Exemple

Simplifier les écritures suivantes :

• $A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$

• $C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$

• $B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$

• $D = \frac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}}$

Propriété

Pour tous réels a et b , on a :

• $e^a = e^b \iff a = b$

• $e^a < e^b \iff a < b$

Exemple

Résoudre une équation ou une inéquation :

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x^2} = 0$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$

Exemple

Étudier une fonction exponentielle :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^x$.

- Calculer la dérivée de la fonction f .
- Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0
- Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice.

III Fonctions de la forme $x \mapsto e^{kx}$

III.1 Variations

La fonction $x \mapsto e^{kx}$, avec $k \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est la fonction $x \mapsto ke^{kx}$.

- Si $k > 0$: la fonction $x \mapsto e^{kx}$ est croissante.
- Si $k < 0$: la fonction $x \mapsto e^{kx}$ est décroissante.

Propriété



Il vous faudra démontrer les propriétés ci-dessus.

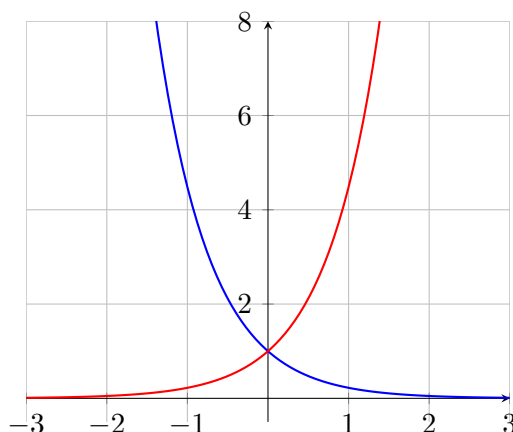
Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-3x}$.

- Calculer la dérivée de la fonction f .
- En déduire les variations de la fonction f .

III.2 Limites

- Si $k > 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{kx} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{kx} = 0$
- Si $k < 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{kx} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{kx} = +\infty$



Propriété

Exemple

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0; 10]$ et telle que $f'(t) = 0.14f(t)$.

- a. Montrer que la fonction f définie sur $[0; 10]$ par $f(t) = Ae^{0.14t}$ convient.
- b. On suppose que $f(0) = 50000$. Déterminer A .
- c. Déterminer les variations de f sur $[0; 10]$
- d. (a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
(b) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé. Arrondir à l'heure près.

IV Croissances comparées des fonctions exponentielles et puissances

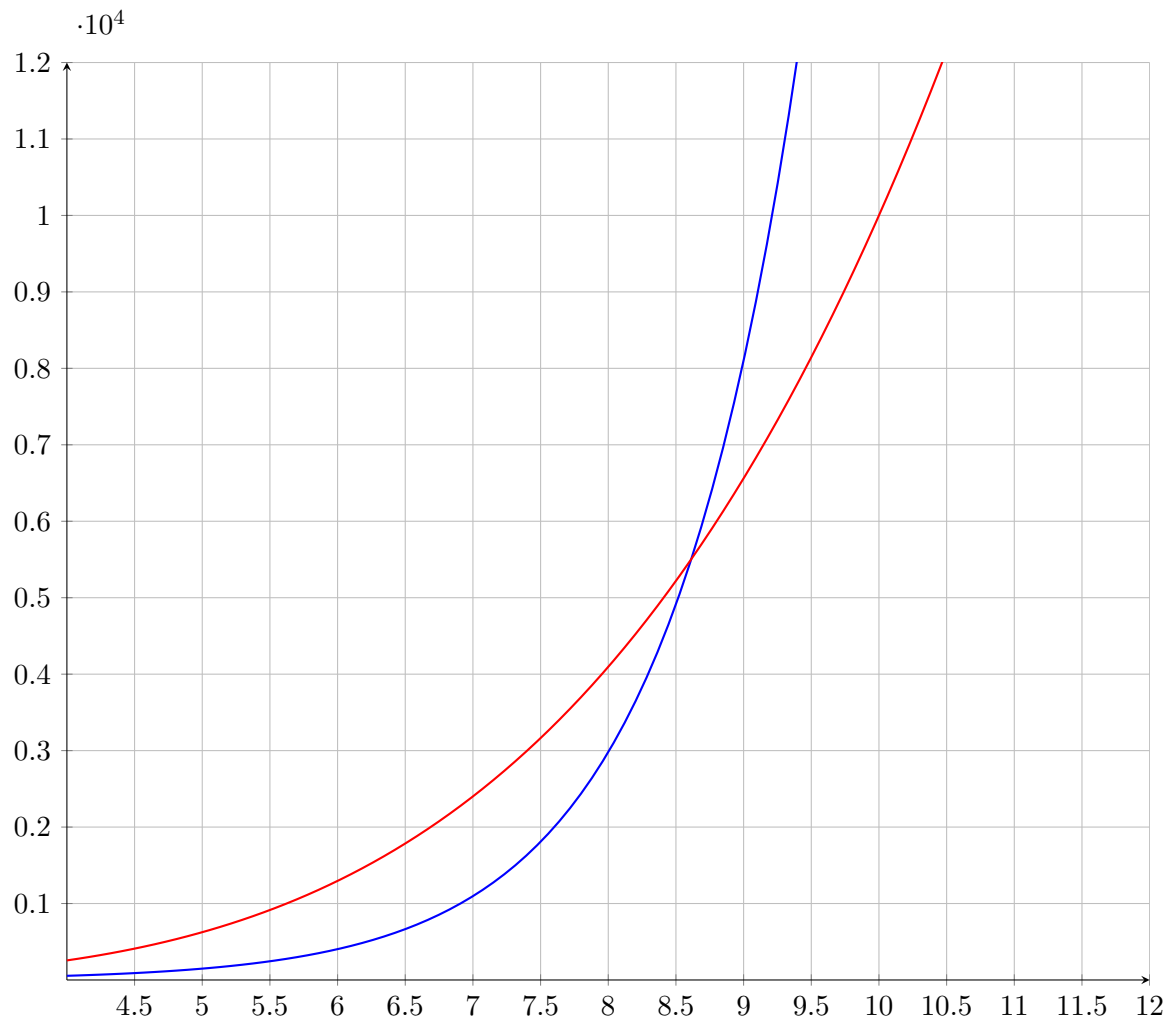
Croissances comparées :

Pour tout entier n , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \times e^{-x} = 0$

Dans le cas de limites infinies, la fonction exponentielle impose sa limite devant les fonctions puissances. Sa croissance est plus rapide.

Exemple

On a tracé en bleu $x \mapsto e^x$ et en rouge $x \mapsto x^4$



Exemple

Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x}$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \times e^{-x} + \frac{1}{e^{2x}}$