Version 220110

2021/2022

Équation

I Rappel de troisième : équation-produit nul

Équation-produit

Toute équation du type $P(x) \times Q(x) = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expression algébriques, est appelée **équation-produit nul**.

Définition

- Dire qu'un produit de facteurs est nul, équivaut à dire que l'un **au moins** des facteurs est nul.
- Le cas particulier de l'équation-produit $(ax+b)(cx+d) = 0$ équivaut à $ax+b=0$ ou $cx+d=0$.

Propriétés

Exemple

$(3x+2)(5x-1) = 0$

$$\begin{array}{lcl} \iff 3x+2=0 & & \iff 5x-1=0 \\ \iff 3x=-2 & \text{ou} & \iff 5x=1 \\ \iff x=-\dfrac{2}{3} & & \iff x=\dfrac{1}{5} \end{array}$$

L'ensemble des solutions est donc : $S = \{-\frac{2}{3}; \frac{1}{5}\}$

II Équation de la forme $x^2 = a$

Rappel : Le carré d'un nombre réel est toujours positif.

Le nombre solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = a$ dépend du signe de a :

- Si $a < 0$, alors l'équation n'as pas de solution.
- Si $a = 0$, alors l'équation possède une unique solution qui est 0. $S = \{0\}$
- Si $a > 0$, alors l'équation possède deux solutions qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Propriété

Démonstration

- Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution car le carré d'un nombre réel est toujours positif.
- Si $a = 0$, alors l'équation s'écrit $x^2 = 0$, donc $x = 0$.
- Si $a > 0$
  Rappel : Si $a > 0$ alors $\sqrt{a}^2 = a$

$$\begin{array}{lrcl}
 & x^2 - a = 0 & & \\
\iff & (a-\sqrt{a})(a+\sqrt{a}) = 0 & \text{troisième identité remarquable} & \\
\iff & x - \sqrt{a} = 0 & \text{ou} & x + \sqrt{a} = 0 \\
\iff & x - \sqrt{a} = 0 & \text{ou} & x + \sqrt{a} = 0 \\
\iff & x = \sqrt{a} & \text{ou} & x = -\sqrt{a}
\end{array}$$

$S = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$

Exemples

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $x^2 = -8$ et $(x+2)^2 = 9$

- l'équation $x^2 = -8$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car -8 est négatif.
- $(x+2)^2 = 9$

$$\begin{array}{llcl}
\iff & x + 2 = \sqrt{9} & \text{ou} & x + 2 = -\sqrt{9} \\
\iff & x + 2 = 3 & \text{ou} & x + 2 = -3 \\
\iff & x = 3 - 2 & \text{ou} & x = -3 - 2 \\
\iff & x = 1 & \text{ou} & x = -5
\end{array}$$

L'équation admet deux solutions : $x = 1$ et $x = -5$.

III Équation-quotient

Définition

Équation-quotient
Toute équation du type $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expression algébriques (avec $Q(x) \neq 0$), est appelée **équation-quotient**.

Propriété

Pour tout x qui n'annule pas l'expression $Q(x)$, l'équation-quotient $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ équivaut à $P(x) = 0$.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ l'équation suivante :
$$\frac{x+1}{x-3} = 0$$
On a donc :
$$\frac{x+1}{x-3} = 0 \iff x + 1 = 0 \iff x = -1 \quad S = \{-1\}$$