Version 230227

2022/2023

Primitives et équations différentielles

I Notion de primitive d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f sur I, une fonction F tel que $F' = f$.

Exemple

On considère les fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 4x+1 \end{array} \qquad F : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x^2+x+1 \end{array}$$

Montrer que f est la fonction dérivée de la fonction F.
F est donc une **primitive** de f.

Propriété

f est une fonction définie sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel C, la fonction $x \longmapsto F(x) + C$ est aussi une primitive de la fonction f sur I.

Démonstration

F est une primitive de f sur I.
On pose $G(x) = F(x) + C$.
$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$
Donc G est une primitive de f sur I.

Exemple

a. Montrer que $F(x) = x^2 + 6x$ définie sur $\mathbb{R}$ est une primitive de la fonction $f(x) = 2x + 6$.
Donner 4 primitives différentes de la fonction f.

b. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x$.
   (a) Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = x^3 - x^2$ est une primitive de f.
   (b) Déterminer la fonction G primitive de f tel que $G(1) = 3$.

II Déterminer la primitive d'une fonction

II.1 Primitives usuelles

Fonction	Primitive
$f(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1} \times x^{n+1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ avec $x \neq 0$	$F(x) = -\dfrac{1}{x}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ avec $x > 0$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ avec $x > 0$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$	$f(t) = \dfrac{A}{\omega}\sin(\omega t + \phi)$
$f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$	$f(t) = -\dfrac{A}{\omega}\cos(\omega t + \phi)$

Propriété

Si F est une primitive de f sur I, et G une primitive de g sur I :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- λF est une primitive de λf sur I avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = x^5$

b. $f(x) = 6x^6 - 2x^2 + 3$

c. $f(x) = 7x^3$

d. $f(x) = 7\cos(3t - \pi)$

e. $f(x) = x^3 + 6x - 3$

f. $f(t) = -4\sin(-t + \dfrac{\pi}{2})$

II.2 Opérations et fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive
$2u'u$	u^2
$u'e^u$	e^u
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(u)$

Exemple

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

a. $f(x) = x^3 - 2x$ sur $I = \mathbb{R}$

b. $f(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$

c. $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)$ sur $I = \mathbb{R}$

d. $f(x) = xe^{x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$

e. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 1}$ sur $I =]0; +\infty[$

III Notion d'équations différentielles

Exemple

Une équation du type $f'(x) = 5$ est une équation différentielle d'inconnue une fonction, $f(x)$. Ici les solutions sont toutes les fonctions du type $f(x) = 5x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Donner **toutes** les solutions de l'équation différentielle suivante : $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2x$

Vérifier que la fonction $f(x) = x^3 + x^2 + 2$ définie sur $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle suivante : $f'(x) = 3x^2 + 2x$.

IV Équations différentielles et fonction exponentielle.

Propriété

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ avec $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions d'équation $y = Ce^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exemple

Résoudre complètement l'équation différentielle suivante $3y' + 5y = 0$. Donner alors l'unique solution telle que $y(1) = 2$.

Propriété

Soient f et g deux solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ avec $a \in \mathbb{R}$:

- $f + g$ est donc également solution de l'équation différentielle
- kf avec $k \in \mathbb{R}$ est également solution de l'équation différentielle.

V Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.

Propriété

Soit l'équation différentielle $y' = ay + b$. La fonction $y = -\dfrac{b}{a}$ est une solution particulière constante de cette équation différentielle.

Démontrer la propriété ci-dessus.

Propriété

L'équation différentielle E : $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$ a pour solution les fonctions de la forme :

$$y = u(x) + v(x)$$

u est la solution particulière constante de E
v est une solution quelconque de $y' = ay$, appelée équation homogène.

Propriété

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $y = Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exemple

Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante : $3y' - y = 6$

a. Déterminer la forme générale des solutions de cette équation.

b. Donner alors l'unique solution tel que $y(0) = 1$.

VI Équation différentielle particulière : un exemple pour comprendre

Propriété

Soit l'équation différentielle suivante $y'' + \omega^2 y = 0$. Les solutions de cette équation sont de la forme $y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$ avec C_1 et C_2 deux réels.

Exemple

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$