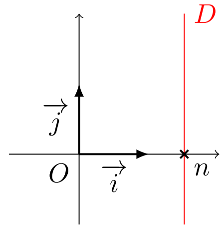
Droites du plan

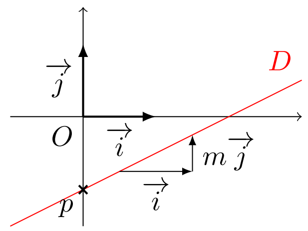
I Équations réduites de droites

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Soit D une droite du plan.

- Si D est parallèle à l'axe des ordonnées : alors l'équation réduite de D est de la forme $x = n$, où n est un nombre réel.



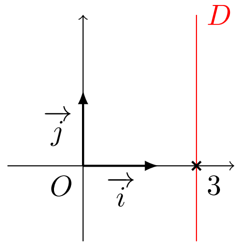
- Si D n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées : alors l'équation réduite de D est de la forme $y = mx + p$, où m et p sont deux nombres réels.

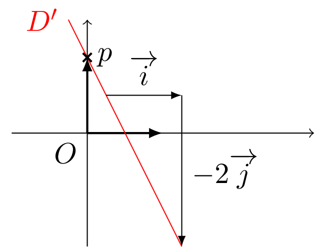


Propriété

Exemple

La droite D d'équation réduite x=3 et la droite D' d'équation réduite $y = -2x + 1$ sont représentées ci-dessous.





(Réciproque de la propriété précédente)
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et m, p, n trois nombres réels, m étant non nul. L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x; y)$, sont tels que : $y = mx + p$ ou $x = n$, est une droite.

Propriété

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts d'une droite D avec $x_A \neq x_B$.
Alors la droite D a pour pente $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
On appelle m le **coefficient directeur** de la droite.

Propriété

Exemple

Soit la droite D passant par $A(2;-3)$ et $B(-1;3)$. Sa pente est donc $m = \frac{3-(-3)}{-1-2} = \frac{6}{-3} = -2$
Son équation réduite est donc $y = -2x + p$
Pour déterminer p on utilise un des points par lequel passe la droite D.

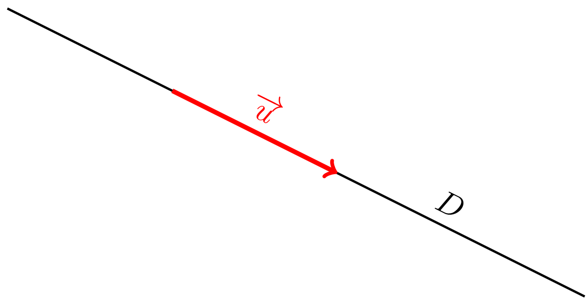
$$\begin{aligned} & -3 = -2 \times 2 + p \\ \iff & p = -3 + 4 \\ \iff & p = 1 \end{aligned}$$

On en déduit donc l'équation réduite de D : $y = -2x + 1$.

II Notion de vecteur directeur d'une droite

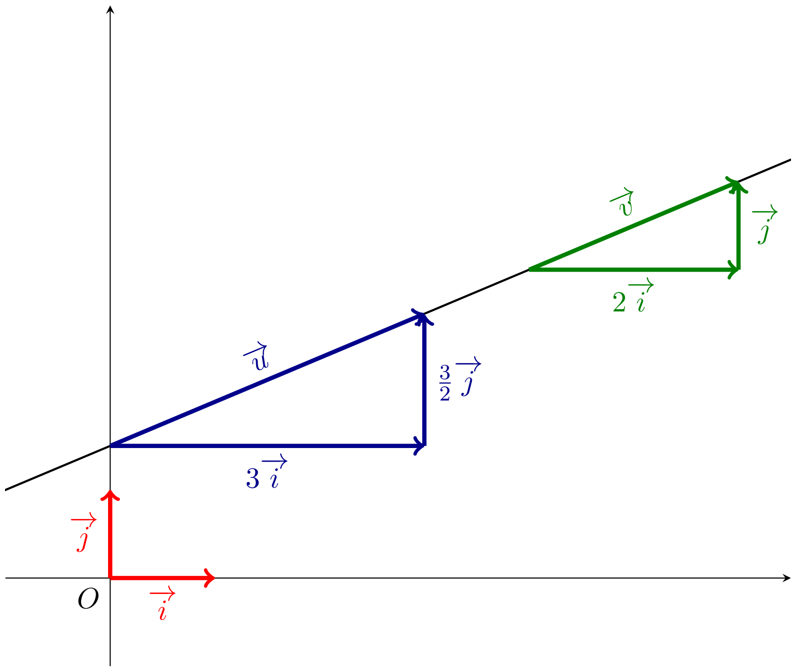
Définition

Soit D une droite du plan.
On appelle **vecteur directeur** de D tout vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ qui possède la <u>même direction</u> que la droite D.



Remarque

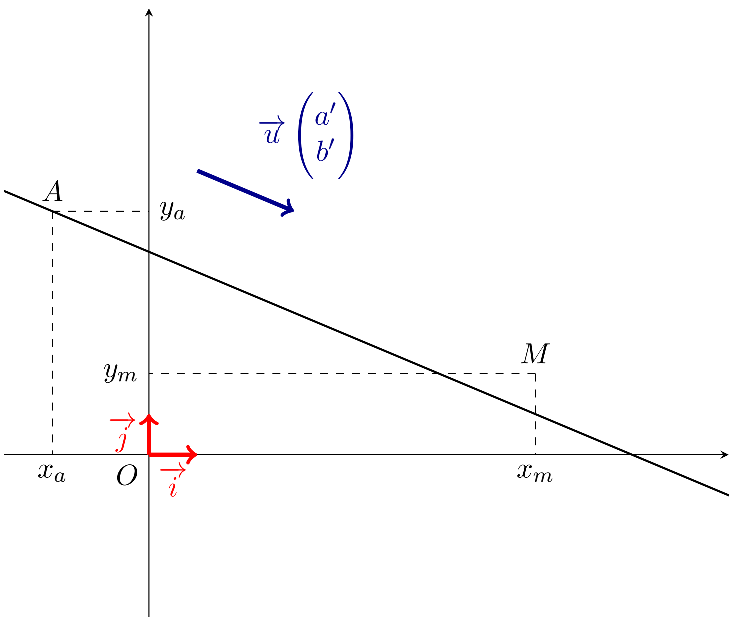
Dans un plan muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, il est possible de déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur d'une droite.
Une droite à une infinité de vecteurs directeurs, ci-dessous $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs directeurs de D.



III Équation cartésienne de droite

Soit une droite D de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$, et $A(x_A;y_A)$ un point de la droite D.

Soit un point du plan $M(x;y)$.



On souhaite caractériser l'appartenance d'un point du plan à la droite D, c'est à dire trouver une condition sur les coordonnées de M pour que celui-ci soit un point de D.

Si M appartient à D, alors le vecteur $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ sera un vecteur directeur de la droite D.

Or tous les vecteurs directeurs de D sont colinéaires, donc $det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AM})=0$ (voir cours vecteurs et repérage).

D'où $\begin{vmatrix}a' & x-x_A\\ b' & y-y_A\end{vmatrix}=0 \iff a'(y-y_A)-b'(x-x_A)=0$

Donc $a'y-a'y_A-b'x+b'x_A=0 \iff a'y-b'x-a'y_A+b'x_A=0$

On note $c=-a'y_A+b'x_A$, $a=-b'$ et $b=a'$
On obtient finalement : $a'y-b'x-a'y_A+b'x_A=0 \iff ax+by+c=0$

Nous venons de démontrer que si $M(x;y)$ était un point de la droite D de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$, alors il existe des réels a, b et c tel que : $ax+by+c=0$

De plus, $a=-b'$ et $b=a'$ donc $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}=\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

♥ Démonstration ♥

Théorème

Toute droite D admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. (voir démonstration ci-dessus).

Un vecteur directeur de D est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b \\ a\end{pmatrix}$

Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite D.

Réciproquement (admis), l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant l'égalité $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, est la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b \\ a\end{pmatrix}$.

IV Lien entre équation cartésienne et équation réduite d'une droite.

Nous allons donc ici expliciter le lien entre équation réduite d'une droite, d'expression $y = mx + p$, et l'équation cartésienne d'une droite dans le plan $ax + by + c = 0$.
Soit une droite D d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.
Nous allons modifier l'égalité pour faire apparaître l'équation réduite de la droite.

$$\begin{aligned} & ax + by + c = 0 \\ & \iff by = -ax - c \\ & \implies \text{Si } b \neq 0 \text{ alors } y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \end{aligned}$$

On pose $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$ on obtient alors l'équation réduite de la droite D : $y = mx + p$.

- m est appelé la pente ou **le coefficient directeur** de la droite D.
- p est appelé **l'ordonnée à l'origine** de la droite D.

Si $b = 0$ alors l'équation cartésienne de la droite D est $ax + c = 0$ et donc $x = -\frac{c}{a}$. On obtient alors une droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de coordonnées $(-\frac{c}{a}, 0)$.

Remarque

Soit D la droite d'équation cartésienne : $ax + by + c = 0$.

On obtient alors un lien entre le vecteur directeur d'une droite $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b \\ a\end{pmatrix}$ et le coefficient directeur $m = -\dfrac{a}{b}$.

V Étude de la position relative de deux droites.

Propriété

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère du plan.

- Deux droites D et D' sont parallèles entre elles si, et seulement si, leurs vecteurs directeur sont colinéaires.
- Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées D et D' sont parallèles entre elles, si, et seulement si, elles ont le même coefficient directeur.

Exemple

Soient les droites D d'équation cartésienne $2x+4y-5=0$ et D' d'équation $-6x-12y+7=0$.

- Un vecteur directeur de D est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$
- Un vecteur directeur de D' est $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}12\\-6\end{pmatrix}$

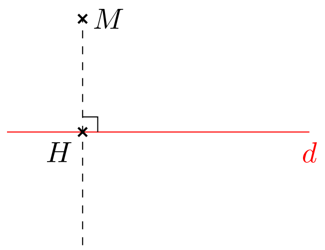
Montrons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires : $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\begin{vmatrix}-4 & 12\\2 & -6\end{vmatrix}=24-24=0$

Les vecteurs directeurs des droites D et D' sont colinéaires, on en déduit que D et D' sont parallèles.

VI Notion de projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition

Soit une droite d et un point M du plan. Le projeté orthogonal du point M sur la droite d est le point d'intersection H de la droite d avec la perpendiculaire à d passant par M.

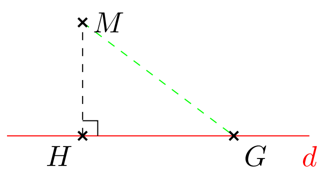


Propriété

Le projeté orthogonal du point M sur la droite d est le point de la droite d le plus proche du point M.

Démonstration

Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite d.
Supposons qu'il existe un point G sur la droite d plus proche de M que H.

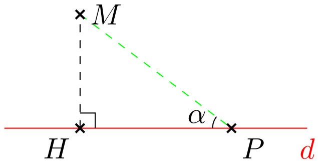


D'après la supposition de départ, $HM \geq GM$.
La fonction carré conserve l'ordre (croissance) donc $HM^2 \geq GM^2$
Or le triangle MHG est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore : $HM^2+HG^2=MG^2$ donc $HM^2=MG^2-HG^2$.
Donc d'après la supposition HG^2 doit être négatif. **Cela est impossible car un carré est toujours positif**.
Nous arrivons à une contradiction donc la supposition de départ était fausse.
Il n'existe donc pas de point $G \neq H$ tel que $MG \leq MH$

Démonstration

Nous allons maintenant démontrer la propriété suivante :$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$

Soit une droite d et un point P appartenant à d. Soit un point M n'appartenant pas à d. On appelle H le projeté orthogonal du point M sur la droite d. On note α l'angle $\widehat{MPH}$.



On utilise ici la trigonométrie vue en classe de troisième et le théorème de Pythagore.

Le triangle MHP est rectangle en H :

$$\cos \alpha = \frac{PH}{PM} \text{ et } \sin \alpha = \frac{HM}{PM}$$

$$PH = PM \times \cos \alpha \text{ et } HM = PM \times \sin \alpha$$

$$HP^2 + HM^2 = PM^2 \text{ (Pythagore)}$$

$$\longrightarrow PM^2(\cos \alpha)^2 + PM^2(\sin \alpha)^2 = PM^2$$

On a donc : $PM^2((\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2) = PM^2$

En divisant par PM : $(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$