2024/2025

Dérivation

Gaston Darboux (1842-1917) est l'un des meilleurs mathématiciens français de la deuxième partie du XIX^e siècle. On lui doit des études sur les surfaces faites de façons analytiques, c'est à dire avec des fonctions coordonnées que l'on peut dériver. Dans un mémoire très novateur appelé *Sur les fonctions discontinues*, il a fourni un exemple de fonction dérivable mais dont la dérivée n'est pas continue en 0 en posant $f(0) = 0$ et $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$.

I Notion de dérivée

Définition

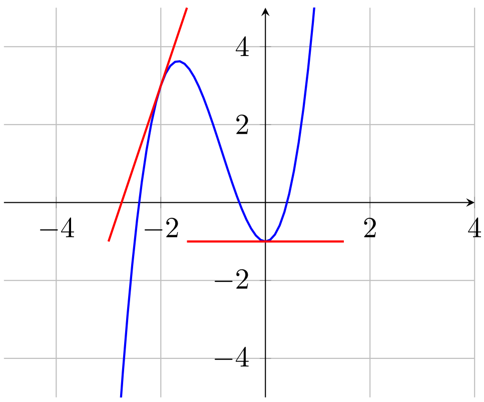
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On dit que f est **dérivable** en x_0 ou au point x_0 lorsque le taux de variation de f en x_0 possède une limite finie en x_0.
En ce cas, $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ s'appelle le **nombre dérivé** de f en x_0.

Définition

Soit $f \ : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable au point d'abscisse x_0.
La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point A d'abscisse a est la droite :

- Passant par $A(x_0, f(a))$ (point commun avec C_f)
- De coefficient directeur le nombre $f'(a)$

Ci-contre, on a représenté en rouge les tangentes à C_f au point d'abscisse -2 et au point d'abscisse 0.



Remarque

Si le taux de variation de la fonction f tend vers $\pm\infty$ en x_0, alors la fonction n'est pas dérivable en ce point.
La droite d'équation $x = x_0$ est alors une tangente verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en x_0.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x + 2$.

a. Calculer le nombre dérivé de f au point d'abscisse 2.
b. En déduire le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.
c. Par quel point passe cette tangente ?
d. A l'aide du coefficient directeur de la tangente, et du point connu, en déduire un autre point appartenant à la tangente à C_f en 2
e. En déduire l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.

Définition

f est **dérivable** sur I, si elle est dérivable en tout point de I. La fonction qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x est la **fonction dérivée** de f. On la note $f' : I \longmapsto \mathbb{R}$.

Définition

f est dites deux fois dérivables sur I, si elle est dérivable sur I et que sa fonction dérivée f' est elle aussi dérivable sur I. La fonction qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé de f' en x est la fonction dérivée seconde de f. On note $f'' : I \longmapsto \mathbb{R}$.

II Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Ensemble de définition	Dérivée f'	Ensemble de définition
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^{kx},\ k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = ke^{kx}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$

Exemple

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes, calculer leur dérivée, puis donner le domaine de définition de la dérivée.

a. $f(x) = e^{6x}$ b. $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$ c. $f(x) = -\dfrac{5}{x^6}$

III Dérivée des opérations de fonctions

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Les fonctions suivantes sont donc dérivables sur I.

$f+g$	$(f+g)' = f' + g'$
kf	kf'
fg	$(fg)' = f'g + fg'$
$\frac{1}{f}$ sur I, où f ne s'annule pas	$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$ sur I, où f ne s'annule pas
$\frac{f}{g}$ sur I, où g ne s'annule pas	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ sur I, où g ne s'annule pas
$f+g$	$(f+g)' = f' + g'$

Exemple

Calculer les dérivées des fonctions suivantes après avoir donné l'intervalle sur lequel elles sont dérivables :

a. $f(x) = (2x^2 - 5x)(3x - 2)$

b. $g(x) = \dfrac{6x - 5}{x^3 - 2x^2 - 1}$

IV Dérivée des fonctions composées

Théorème

Soit f et u deux fonctions telles que f est dérivable dans un ensemble J, u est dérivable dans un ensemble I et que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$. Alors la composée $f \circ u$ est dérivable dans I et pour tout $x \in I$:

$$(f \circ u)'(x) = (f' \circ u)(x) \times u'(x) = f'(u(x)) \times u'(x)$$

Fonction	Dérivée
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$
u^2	$2u'u$
u^n	$nu^{n-1} \quad n \in \mathbb{N}^*$
e^u	$u'e^u$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Exemple

Déterminer la dérivée des fonctions définies par :

a. $f(x) = (2x^2 + 3x - 3)^2$

b. $g(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

b. En déduire les variations de la fonction f.

V Étude des variations d'une fonction et tangente

Théorème

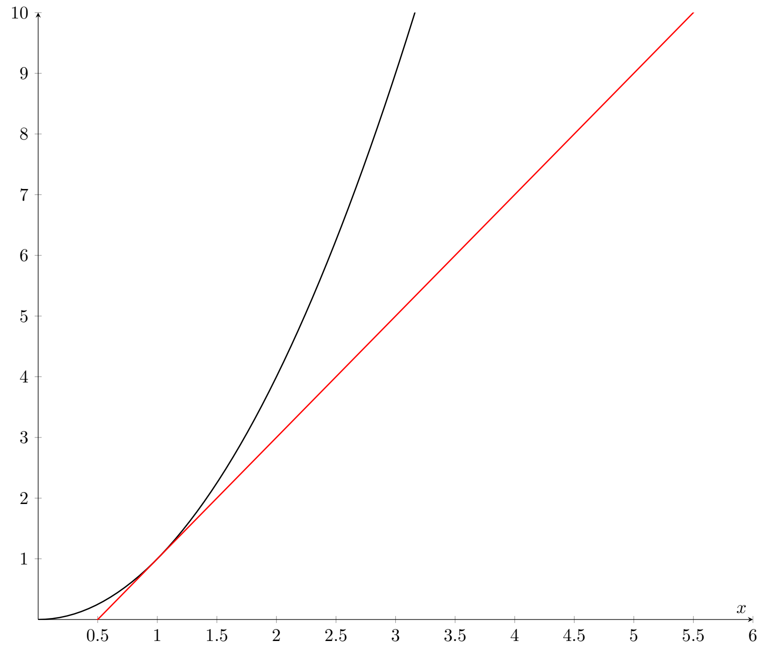
Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I :

- Si $f'(x) \leq 0$ alors la fonction f est décroissante
- Si $f'(x) \geq 0$ alors la fonction f est croissante

Exemple

Étudier les variations de la fonction $f(x) = x^2 - 4x$ sur son intervalle de définition.

On a tracé ci-dessous la fonction d'équation $y = x^2$ et la droite $y = 2(x - 1) + 1$.
On remarque que lorsque $x = 1$ la droite a une pente identique à la courbe. La droite est confondue avec la courbe en ce point.



Définition

La tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.
Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

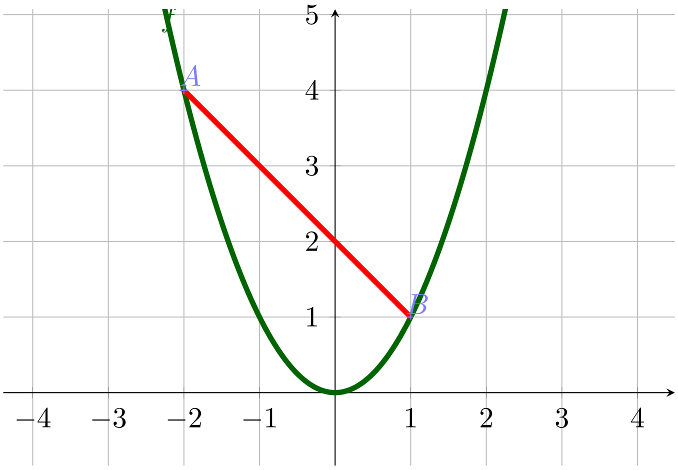
Exemple

Déterminer une équation de la tangente à la fonction $f(x) = x^3 + 2x + 3$ en A tel que $x_A = 1$.

VI Fonction convexe et fonction concave

VI.1 Une première définition

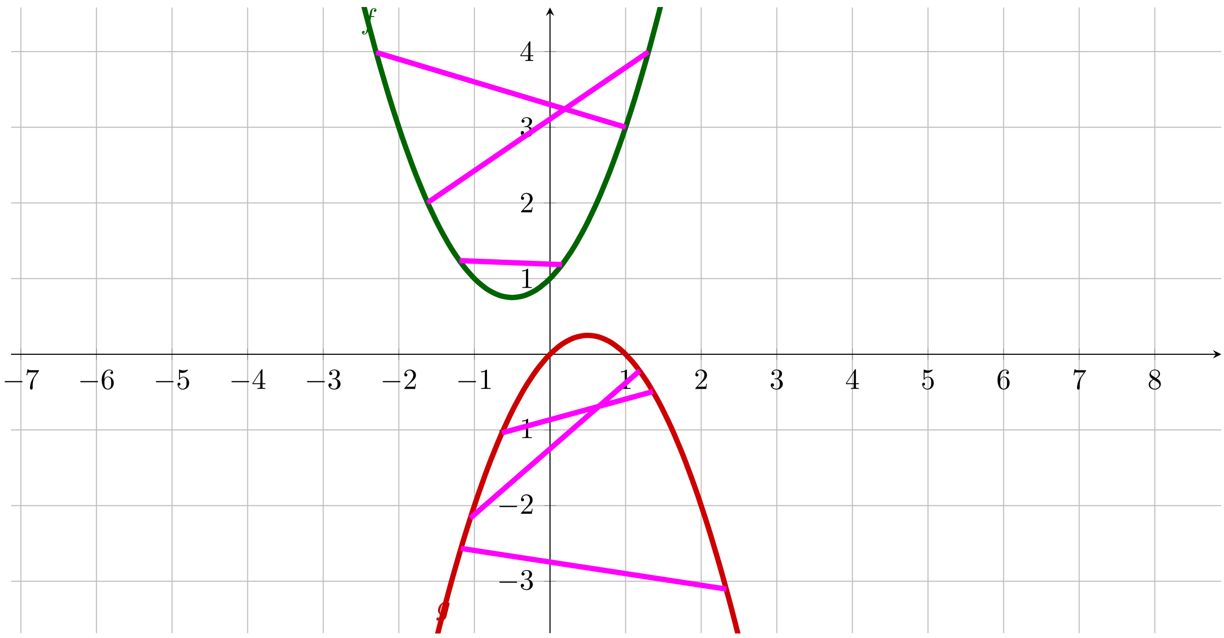
Une corde est un segment reliant deux points d'une courbe.
Ci-dessous, $[AB]$ est une corde de la fonction carré.



Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.

- La fonction f est convexe sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes (courbe verte).
- La fonction f est concave sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes (courbe rouge).



Définition

Propriété

Inégalité des cordes :
Une fonction f définie sur un intervalle I est convexe sur I si et seulement si

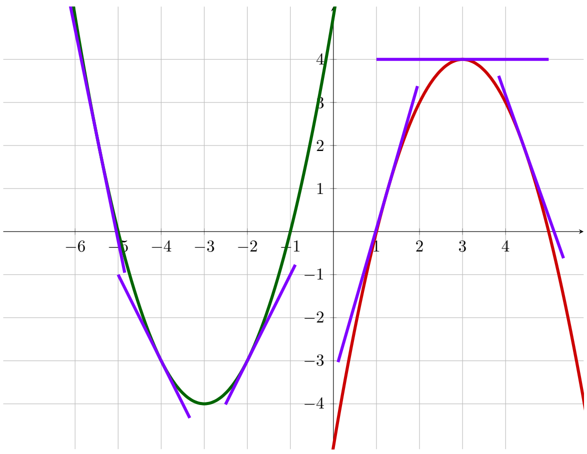
$$\forall (x_1; x_2) \in I \times I,\ \forall \lambda \in [0;1],\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

VI.2 Une deuxième définition

Définition

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est convexe sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- La fonction f est concave sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



Exemple

Donner des exemples de fonctions convexes et concaves.

Propriété

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est convexe sur I, si sa dérivée f' est croissante sur I, soit

$$f''(x) \geq 0, \text{ pour tout } x \text{ de } I.$$

- La fonction f est concave sur I, si sa dérivée f' est décroissante sur I, soit

$$f''(x) \leq 0, \text{ pour tout } x \text{ de } I.$$

Théorème

Inégalité des tangentes
Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. $f'' \geq 0$ sur I, si et seulement si la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes :

$$\forall x_0 \in I,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Démonstration

Démontrons que f est convexe si f' est croissante.
On considère la fonction g dérivable sur I définie par : $g(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$.
Alors $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.
Or f' est croissante sur I, donc g' est également croissante.
De plus, $g'(a) = 0$. Donc g' est négative pour $x \leq a$ et positive pour $x \geq a$.
On peut donc compléter le tableau de variations de g.

x		a	
g	$\searrow$	0	$\nearrow$

En effet, $g(a) = f(a) - f'(a)(a - a) - f(a) = 0$
Donc $g(x) \geq 0$ sur I.
Donc $f(x) \geq f'(x)(x - a) + f(a)$
On en déduit que la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes sur I et donc que f est convexe sur I.
Démonstration analogue pour prouver que : f est concave, si f' est décroissante

Exemple

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 8x^2 + 2$.
Étudier la convexité de la fonction f.

VII Point d'inflexion

Définition

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I. Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.
Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

Exemple

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois. Le coût de fabrication C (en milliers d 'euros) de x milliers de clés produites s'exprime par :

$$C(x) = 0,05x^3 - 1,05x^2 + 8x + 4$$

a. À l'aide de la calculatrice graphique, conjecturer la convexité de la fonction C. En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.

b. Démontrer ces résultats.

c. Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l'exercice.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c. Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice.

d. Déterminer une valeur approchée de l'abscisse du point d'inflexion à la courbe.

e. Démontrer que $f''(x) = \left(\frac{x}{4} - 1\right) e^{-\frac{x}{2}}$

f. En déduire l'abscisse du point d'inflexion.