



NOMBRES COMPLEXES (1)

En 1545, **Jérôme Cardan** publie un ouvrage dans lequel on trouve pour la première fois une formule donnant les solutions des équations du troisième degré. Pour certaines d'entre elles, l'application de la formule faisant apparaître l'expression $\sqrt{-1}$ qui se simplifiait par miracle, fournissant le bon résultat. Le mathématicien italien Rafaele Bombelli (1526-1573) propose alors de créer de nouveaux nombres, que l'on ne nomme pas encore nombres complexes, puis il définit dessus des règles pour les opérations d'addition et multiplication. Un nouvel ensemble de nombres était né !

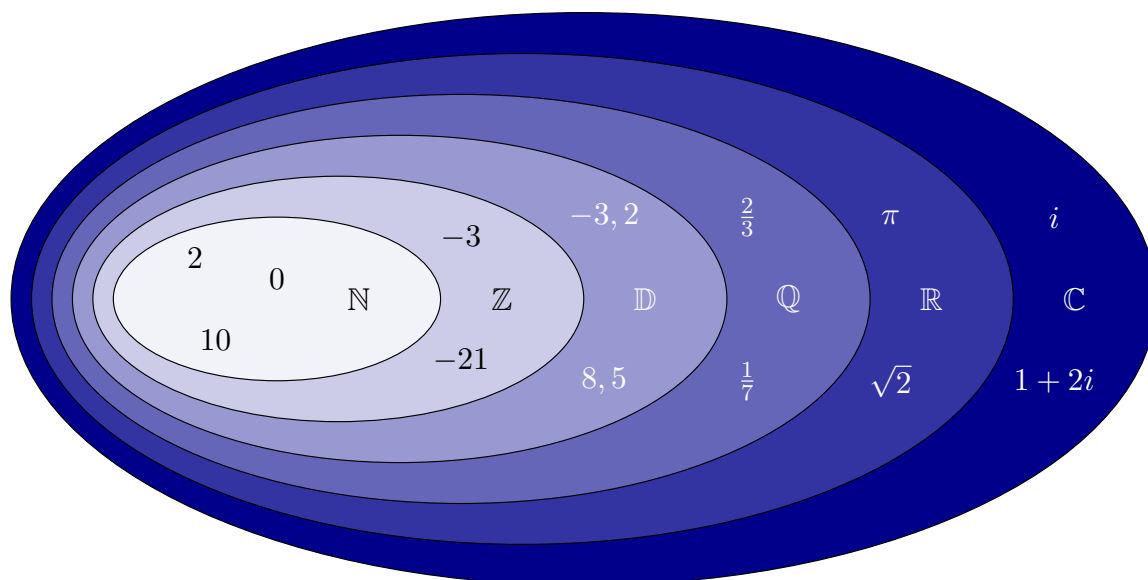
I Découverte de l'ensemble $\mathbb{C}$

Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.
- Dans $\mathbb{C}$, on définit une multiplication et une addition qui suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.
- Dans cet ensemble $\mathbb{C}$, il existe un nombre noté i , tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière **unique** $z = a + ib$ avec a et b réels.

Définition

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$



Définition

- On appelle **forme algébrique** d'un nombre complexe z l'écriture $z = a + ib$ avec a et b réels (par exemple : $z = 2 + 3i$).
- Soit un nombre complexe $z = a + ib$, on appelle **nombre complexe conjugué de z** , le nombre noté $\bar{z}$, tel que $\bar{z} = a - ib$ (par exemple : $\bar{z} = 2 - 3i$).

Remarque

- Le nombre a s'appelle la partie réelle et la nombre b s'appelle la partie imaginaire. On note : $\Re(z) = a$ et $\Im(z) = b$
- Si l'on additionne un nombre complexe et son conjugué, on obtient le double de sa partie réelle : $z + \bar{z} = 2a$

Exemple

Voici quelques exemples de nombres complexes :

- $z = 2 + 3i$ la partie réelle est $a = 2$ et la partie imaginaire $b = 3$.
- $z = 1 - i$ la partie réelle est $a = 1$ et la partie imaginaire $b = -1$.
- $z = 2$ est un réel et $z = 2i$ est un imaginaire pur.

Exemple

Exercices : 1 à 7

Théorème

Opérations sur les nombres complexes : soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes (avec a, a', b et b' des réels). Alors :

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
- $z\bar{z} = a^2 + b^2$

Théorème

Inverse d'un nombre complexe non nul : soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. Alors z admet un inverse que l'on note $\frac{1}{z}$ et on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Exercice : Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a. $z = 35i(3i4)$

d. $z = \frac{1}{4 - 2i}$

b. $z = (32i)(1 + 5i)$

e. $z = \frac{1 + i}{2 - i}$

c. $z = (23i)^2$

f. $z = (2i)^{13}$

Propriété

- Deux nombres complexes sont égaux, si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
- Un nombre complexe est nul, si et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Exemple

Exercices 8 à 38

I.1 Propriétés du conjugués

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ avec $z \neq 0$.
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ avec $z' \neq 0$.
- Soit $z = a + ib$ alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$.
- $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

Propriété

Exemple

Soit $z = a + ib$ avec a et b réels.

Calculer $\frac{z + \overline{z}}{2}$, puis $\frac{z - \overline{z}}{2i}$. Que remarque-t-on ?

Caractérisation d'un réel, d'un imaginaire pur Soit z un nombre complexe alors :

- $z \in \mathbb{R}$ ssi $\overline{z} = z$
- $z \in i\mathbb{R}$ ssi $\overline{z} = -z$

Théorème

Exemple

Exercices 39 à 73